



Vibrações Aleatórias Dinâmica Estocástica

**Apontamentos da Disciplina de Dinâmica e Engenharia
Sísmica**

Mestrado em Engenharia de Estruturas

Instituto Superior Técnico

João J. R. T. de Azevedo

1996

| ÍNDICE | Pág. |
|--|-------------|
| 1 - Introdução | 1 |
| 1.1 – Conceito de vibração aleatória | 1 |
| 1.2 – Processos determinísticos e estocásticos | 2 |
| 1.3 – Classificação de processos determinísticos e estocásticos | 4 |
| 1.4 – Estatística de processos | 10 |
| 2 - Correlação de processos | 15 |
| 2.1 – Correlação de variáveis | 15 |
| 2.2 – Função de autocorrelação | 18 |
| 2.3 – Correlação cruzada | 21 |
| 3 - Densidade espectral | 23 |
| 3.1 – Noção de densidade espectral | 23 |
| 3.2 – Densidade espectral de processos derivados | 28 |
| 3.3 – Densidade espectral teórica e experimental | 30 |
| 4 - Relações excitação-resposta para sistemas lineares | 31 |
| 4.1 – Introdução | 31 |
| 4.2 – Procedimento clássico de análise de relações excitação-resposta | 32 |
| 4.3 – Método da resposta impulsiva | 36 |
| 4.4 – Relação entre $H(\omega)$ e $h(t)$ | 37 |
| 4.5 – Transmissão de vibrações | 38 |
| 5 - Estatística de processos de banda estreita | 47 |
| 5.1 – Introdução | 47 |
| 5.2 – Caracterização de processos | 49 |
| 6 - Bibliografia | 61 |
| Anexo I – Tabelas de integrais para cálculo de valor quadrático médio | 63 |

1. Introdução

1.1 Conceito de vibração aleatória

O estudo de vibrações aleatórias, está intimamente ligado ao estudo de processos estocásticos em que os fenómenos envolvidos são do âmbito da mecânica e mais especificamente da dinâmica.

Referências como vibrações aleatórias, conjunto de valores aleatórios, análise de séries temporais ou processos estocásticos podem ser várias formas de mencionar um mesmo fenómeno. Muitas vezes, a noção de processo estocástico serve também para caracterizar fenómenos aleatórios.

A palavra estocástico, normalmente sinónimo de conjectural ou de natureza aleatória, provem do grego “*stokhastikos*“ que significa habilidoso no objectivo. Posteriormente, a palavra passou a ter o significado de conjectura ou de tentativa de obtenção um resultado, tendo sido finalmente adoptada para descrever um fenómeno aleatório.

O conceito matemático dos processos estocásticos tem-se revelado adequado para descrever alguns fenómenos físicos, e não só. Entre estes podem citar-se a caracterização de ruído nas transmissões por rádio, o estudo das ondas cerebrais, as flutuações nos mercados das bolsas de valores. Em engenharia civil tem sido essencialmente utilizado para proceder à caracterização das acções sísmicas, do vento e dos seus efeitos sobre as construções e ainda para estudar vibrações em estruturas e de forma indirecta avaliar as suas características dinâmicas.

Com efeito, em aplicações de Engenharia Civil e especialmente em Engenharia de Estruturas, torna-se necessário analisar os fenómenos que causam vibrações em construções, quer por poderem influenciar a segurança estrutural, quer por poderem causar desconforto aos utentes dessas construções. Entre as acções que provocam vibrações em construções, podem citar-se a acção sísmica, o vento, as explosões, o funcionamento de máquinas, o tráfego rodoviário e ferroviário e até o movimento de pessoas.

A acção sísmica é sem dúvida a mais importante do conjunto atrás enunciado, já que, pelo menos em muitas zonas do globo e também em Portugal, condiciona o dimensionamento estrutural. No entanto outros tipos de acções de características aleatórias, tais as vibrações induzidas pela passagem de tráfego pesado, pela cravação de estacas, pela ocorrência de explosões ainda que controladas, etc., podem também colocar questões de segurança, especialmente em estruturas mais antigas, devendo portanto ser objecto de análise cuidada.

Finalmente, é cada vez mais importante ter em conta o desconforto humano causado por fontes de vibração tais como o tráfego urbano, o funcionamento de máquinas e outras fontes, que também pela seu carácter repetitivo podem induzir para além do desconforto, doenças tanto do foro psíquico como físico.

1.2 Processos determinísticos e estocásticos

O conceito de processo determinístico radica na oposição ao conceito de processo estocástico. Suponha-se que se registam várias vezes, e sempre sobre as mesmas condições, as vibrações de um dado equipamento, obtendo-se um conjunto de registos que se denomina por processo. Suponha-se ainda que os registos obtidos (realizações desse processo) são idênticos, quer sejam regulares ou irregulares. Pode então dizer-se que esse processo é determinístico (portanto não estocástico), já que as características de uma próxima realização desse processo são à partida conhecidas.

Um exemplo de um processo determinístico é um conjunto de movimentos de um mesmo pêndulo em que as condições iniciais (posição e velocidade) sejam inequivocamente conhecidas. Nessas condições, é possível deduzir uma expressão matemática que traduza, inequivocamente, o movimento do pêndulo, para cada vez que o mesmo seja colocado em movimento.

No entanto, se os registos efectuados (cada uma das realizações do processo) diferirem entre si, ainda que as condições sejam idênticas, então o processo diz-se estocástico ou de natureza aleatória. As diferenças

encontradas de registo para registo derivam neste caso de variabilidades naturais e não podem ser controladas pelo observador.

Um exemplo de um processo estocástico é uma sequência de registos sísmicos efectuados num dado local. Todos os registos serão diferentes, não existindo, excepto de um ponto de vista estatístico, qualquer tipo de previsibilidade relativamente às características de um dado evento.

Outro exemplo de um processo estocástico pode ser o conjunto de vibrações medidas numa máquina em que se verifique qualquer anomalia, ou em que as condições de trabalho impliquem que o seu funcionamento não seja perfeitamente regular.

O conceito de imprevisibilidade está portanto associado à noção de processos estocásticos, em relação aos quais se pode dizer que a sua previsibilidade é puramente estatística. Estes processos só podem, portanto, ser descritos através da sua probabilidade de ocorrência, ainda que sejam função de uma variável determinística. Essa variável é usualmente o tempo, mas pode também ser qualquer outra.

Na realidade, poderia até afirmar-se que, de um ponto de vista formal, não existem fenómenos estritamente determinísticos. Mesmo em relação ao exemplo do movimento pendular, poderá conjecturar-se que as condições de fixação do pêndulo não são estáveis, que o movimento do ar circundante e o consequente atrito não serão constantes ao longo do tempo, que as condições iniciais do movimento não são exactamente as mesmas e são elas próprias aleatórias, etc.

Deve portanto existir a convicção de que todos os fenómenos têm, por natureza, características aleatórias, embora, nalguns casos, se possa com suficiente aproximação admitir que sejam simulados e estudados assumindo que possuem um carácter determinístico. É esse o caso em grande parte dos fenómenos que são estudados em engenharia, nomeadamente em engenharia civil e especificamente em engenharia de estruturas. Em muitas situações assumem-se determinados fenómenos como sendo determinísticos, considerando na realidade valores estatísticos inferidos através da análise dos processos estocásticos correspondentes. Exemplos relacionados com a engenharia de estruturas correspondem à caracterização da resistência dos

materiais e à quantificação dos vários tipos de acções: sismos, vento, outras acções variáveis e até cargas permanentes.

O estudo dos fenómenos aleatórios, e especificamente das vibrações aleatórias, que são o objectivo do presente texto, pressupõe a utilização da teoria dos processos estocásticos, a qual por sua vez se baseia na teoria da probabilidade.

1.3 Classificação de processos determinísticos e estocásticos

Um conjunto de valores função da variável tempo e representando um fenómeno físico, pode ser classificado, como se viu, como determinístico ou estocástico.

Um conjunto de valores determinístico, que pode ser descrito através de uma relação matemática, pode ser classificado, de acordo com as suas características, em periódico ou não periódico consoante os valores se repitam após um dado período de tempo.

Os fenómenos periódicos podem classificar-se em sinusoidais e não sinusoidais. Os fenómenos sinusoidais são aqueles que podem ser descritos através de funções de tipo seno ou coseno. Os periódicos não sinusoidais são aqueles que podem ser descritos através de outras funções periódicas que não as sinusoidais.

Como exemplo de fenómeno periódico sinusoidal pode citar-se a vibração induzida por uma máquina rotativa quando se encontra a funcionar em regime permanente. Como exemplo de um fenómeno periódico não sinusoidal pode referir-se a vibração induzida por um martelo pneumático em que as pancadas possuem a mesma amplitude e se encontram igualmente espaçadas.

Entre os fenómenos não periódicos podem destacar-se os quase periódicos e os transitórios. Os fenómenos quase periódicos são aqueles em que não existindo uma periodicidade formal, podem ser analisados considerando a existência de um período. Os fenómenos determinísticos

transitórios são aqueles em que não é possível observar nenhuma repetição de valores após um dado período de tempo. Um exemplo de fenómeno transitório pode ser o das vibrações induzidas por uma máquina rotativa na altura do seu arranque.

Um conjunto de valores que não possa ser descrito através de uma relação matemática explícita é considerado como estocástico e tem a propriedade de ser um conjunto único.

Uma série de registos dependentes do tempo, $[x_i(t); i=1, n]$, denominado um conjunto de realizações, considera-se um processo estocástico quando pode ser descrito através de propriedades estatísticas apropriadas. Essas propriedades estatísticas de um processo estocástico são obtidas, em geral, fazendo médias do conjunto considerando todos os registos. Várias classificações são possíveis quanto às características dessas propriedades.

Assim, os processos estocásticos podem ser classificados em estacionários ou não estacionários. Os processos estacionários são aqueles em que as propriedades estatísticas não variam com o tempo. Os processos não estacionários são caracterizados por terem as suas propriedades estatísticas a variar com o tempo e por as propriedades estatísticas conjuntas em dois instantes diferentes serem função desses mesmos instantes e não da sua diferença temporal.

A classe de processos estocásticos estacionários é caracterizada pelo facto de as suas propriedades estatísticas serem invariantes relativamente a qualquer translação no tempo. Também as propriedades estatísticas conjuntas para dois instantes diferentes, não são uma função desses instantes mas sim da diferença temporal. Este facto permite que as propriedades estatísticas de processos estacionários sejam muito mais fáceis de determinar do que as de um processo não estacionário.

Como exemplo de um processo estacionário pode considerar-se as vibrações induzidas por uma máquina a trabalhar em regime permanente e como exemplo de processo não estacionário pode considerar-se as vibrações induzidas por sismos.

Na Figura 1.1, ilustra-se uma realização de um processo estocástico, que corresponde a uma sucessão de números aleatórios contidos num dado

intervalo, centrado em zero, e uniformemente distribuídos nesse intervalo. Como pode inferir-se do tipo de processo em causa e como pode observar-se, o valor médio e as outras características estatísticas mantêm-se constantes ao longo do tempo. No caso apresentado na figura, a estacionaridade pode ser visualmente observada pelo facto de o conjunto de valores ter simultaneamente a média e a envolvente a assumir valores constantes ao longo do tempo. Dada a natureza do sinal pode portanto dizer-se que as características estatísticas são independentes do tempo e, partindo do princípio que todas as realizações terão idênticas características, o processo pode ser considerado estacionário.

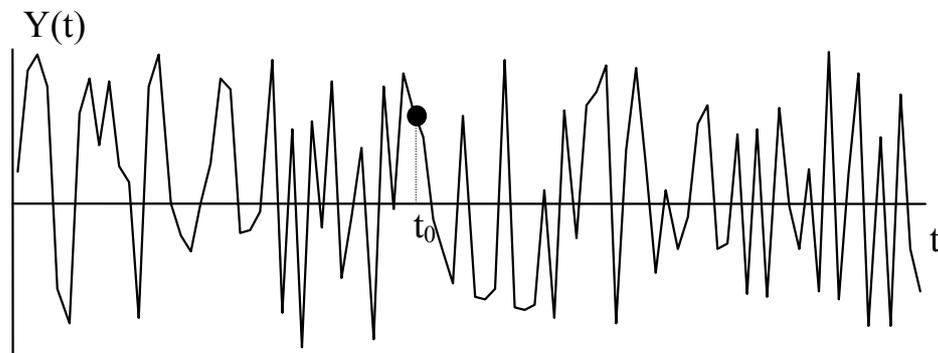


Fig. 1.1 – Realização de um processo estocástico estacionário.

Exemplos típicos de processos não estacionários são os registos sísmicos, nomeadamente os acelerogramas. Na Figura 1.2 pode observar-se um acelerograma típico. A não estacionaridade é patente, já que as propriedades estatísticas variam com o tempo. Embora o valor médio do sinal seja constante, já a envolvente, que está relacionada com os valores máximos e com a variância do sinal, assume diferentes valores em função do instante em que é determinada.

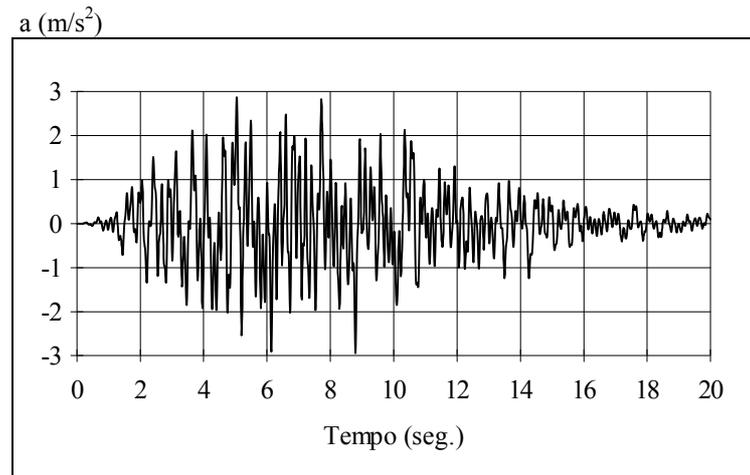


Fig. 1.2 – Realização de um processo estocástico não estacionário – Acelerograma típico.

O conjunto que pode ser observado na Figura 1.3, é constituído por uma série de realizações $y_i(t)$, todas elas semelhantes à exibida na Figura 1.1. O processo pode ser interpretado como um processo bidimensional ou seja, como um processo $y(i, t)$.

Se por um lado, se fixar um dado $i=i'$, então a função $y(t)$ para $i=i'$ é chamada uma realização do processo e os valores que assume podem ser definidos através de uma função densidade de probabilidade.

Para um dado valor de $t=t'$, $y(i, t')$ é uma função do espaço de realizações i , ou seja, $y(i)$ para $t=t'$ é uma variável aleatória unidimensional definida através de uma função densidade de probabilidade (por exemplo o conjunto de valores indicado para t igual a t_1 ou t_2 na Figura 1.3).

Uma subclasse dos processos estacionários são os processos ergódicos. Estes processos são caracterizados pelo facto de as médias de qualquer uma das realizações desse processo serem iguais. Daqui resulta que as médias temporais de todas as realizações são iguais às médias de qualquer uma das realizações.

No caso da Figura 1.3, o processo é dito um processo ergódico, já que cada um dos sinais $x_i(t)$ (realizações do processo estocástico estacionário) tem um valor médio que, dadas as características das realizações é o mesmo para todos os sinais. A estatística de um conjunto de valores é igual quer a

amostragem seja efectuada numa só realização para todos os valores de t , quer o seja para um dado valor t' para todas as realizações.

Como se pode concluir, um processo ergódico é necessariamente um processo estacionário (o inverso não é verdadeiro). Tal verifica-se porque, se num instante genérico (na Figura 1.3 para t igual a t_1 ou t_2), a média dos valores registados para cada realização for igual à média dos valores registados ao longo do tempo para cada uma das realizações, então a estatística de cada uma das realizações não é dependente do tempo.

A grande vantagem de lidar com processos ergódicos é a de bastar uma realização do processo para se poder inferir propriedades estatísticas sobre todo o processo.

A possibilidade de assumir a estacionaridade e a ergodicidade de processos é pois de vital importância para a análise de processos estocásticos.

Finalmente refira-se que, consoante o conjunto de valores de uma dada realização é finito ou não, assim se pode classificar um processo como discreto ou contínuo. De um ponto de vista prático, muitos dos processos contínuos são transformados em processos discretos, já que, pela necessidade de digitalizar a informação obtida, se torna obrigatório discretizar o processo através de uma amostragem de valores.

Como processo estocástico contínuo pode-se por exemplo referir a variação da temperatura ao longo de um ciclo diurno. Cada realização do processo corresponde assim a um registo contínuo de temperaturas durante um dia, e o processo consiste na conjugação da informação relativa a todos os dias em que exista um registo contínuo.

Como processo discreto pode-se referir a precipitação diária ao longo de um ano num dado local. Nesse caso cada realização consiste num conjunto de 365 valores referente às precipitações diárias durante um ano e o processo consiste no conjunto de realizações para todos os anos em que tal informação esteja disponível.

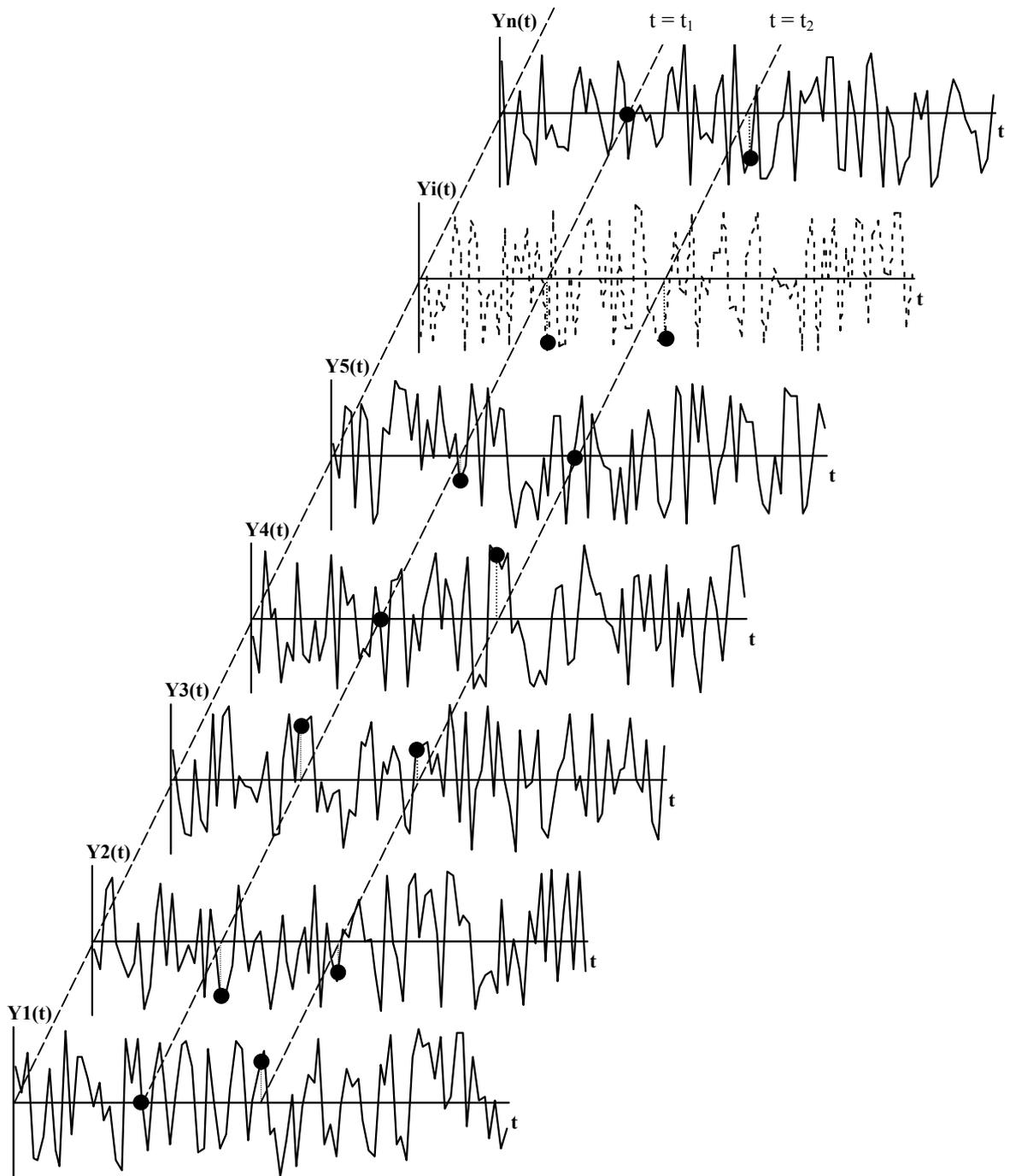


Fig. 1.3 – Múltiplas realizações de um processo estocástico estacionário.

1.4 Estatística de processos

Considere-se um processo estocástico $x(t)$, por exemplo, os valores de aceleração medidos num acelerógrafo. Num dado instante t_1 , essa aceleração assume um valor aleatório, que tem uma certa probabilidade de ocorrência. Essa probabilidade pode ser expressa em termos da função densidade de probabilidade ou em termos da função cumulativa.

A função densidade de probabilidade expressa a probabilidade do valor registado estar contido num intervalo elementar Dx .

$$P [x < x (t_1) \leq x + \Delta x] = p_x (x; t_1) \Delta x \quad (1.1)$$

a qual é igual à razão entre o período de tempo em que $x(t)$ se situa entre x e $x + Dx$ e o período de tempo em que se procedeu ao registo do acelerograma.

A função cumulativa define a probabilidade de o valor registado ser inferior a um dado valor x

$$P [x (t_1) \leq x] = F_x (x; t_1) = \int_{-\infty}^x p_x (x, t_1) dx \quad (1.2)$$

a qual é igual à razão entre o período de tempo em que $x(t) \leq x$ e o período de tempo em que se procedeu ao registo do acelerograma.

Finalmente, a probabilidade de o valor de $x(t)$ estar situado entre dois valores x_0 e x_1 , é dada pela seguinte expressão

$$P [x_0 < x (t_1) \leq x_1] = F_x (x_1; t_1) - F_x (x_0; t_1) = \int_{x_0}^{x_1} p_x (x, t_1) dx \quad (1.3)$$

Para se compreender a caracterização probabilística de um processo, atente-se ao indicado na figura 1.4.

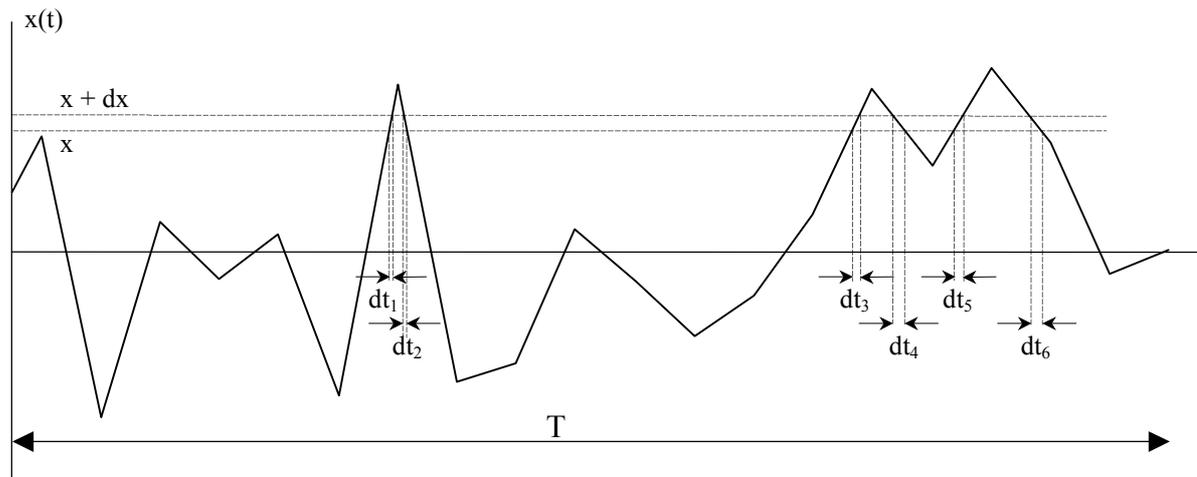


Fig. 1.4 – Avaliação da função densidade de probabilidade de um processo

Nessa figura pode observar-se que os valores registados assumem, em seis zonas do registo, valores situados no intervalo entre x e $x + \Delta x$. Assim sendo, uma forma simplificada de calcular a probabilidade de os valores registados se situarem nesse intervalo é calcular o quociente entre a soma das durações desses intervalos e a duração total do registo.

$$p_x(x) = P [x < x(t) \leq x + \Delta x] = \frac{dt_1 + dt_2 + dt_3 + dt_4 + dt_5 + dt_6}{T} \quad (1.4)$$

Suponha-se que se pretende calcular a função densidade de probabilidade da história de deslocamentos descrita pela função periódica (período T)

$$x(t) = \frac{2t}{T} - \frac{t^2}{T^2} \quad (1.5)$$

cuja representação gráfica é efectuada na figura 1.5, para o intervalo correspondente a um período T .

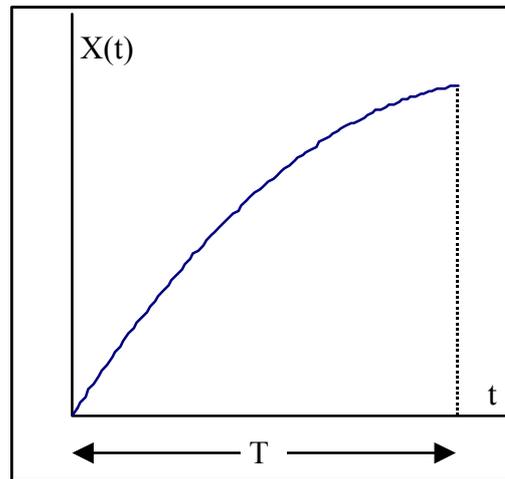


Fig. 1.5 – Função periódica definida para o período T

Nesse caso, pode-se inequivocamente calcular o valor de x em qualquer instante e também determinar a função densidade de probabilidade dos valores de x .

Diferenciando a função $x(t)$ obtém-se:

$$dx = \left(\frac{2}{T} - \frac{2t}{T^2} \right) dt \quad (1.6)$$

ou seja

$$\frac{dt}{T} = \left(\frac{T}{2(T-t)} \right) dx \quad (1.7)$$

Assim sendo, e dado que

$$\frac{dt}{T} = p_x(x) dx \quad (1.8)$$

$$p_x(x) = \frac{T}{2(T-t)} \quad (1.9)$$

função que se representa na figura 1.6.

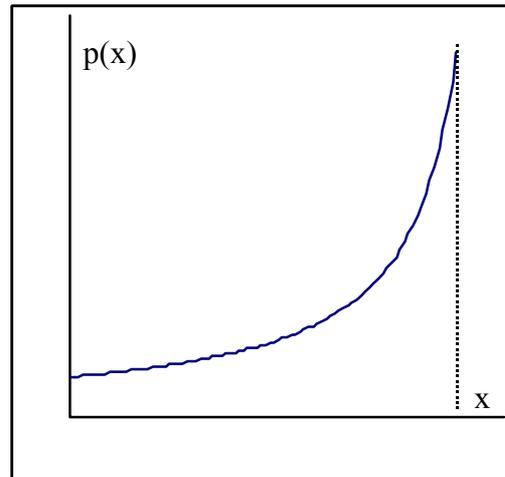


Fig. 1.6 – Função densidade probabilidade da função periódica definida na Figura 1.5

Como pode observar-se, a probabilidade de se verificarem valores da função perto de zero é muito menor do que a probabilidade de se obterem valores perto da unidade.

Entre os valores estatísticos de uma função mais relevantes podem citar-se o valor esperado de um dado processo num dado instante e a média temporal de uma dada realização desse processo. Obviamente, no caso de processos ergódicos estes dois valores são coincidentes.

O primeiro pode ser calculado através da expressão

$$E [x(t')] = \int_{-\infty}^{+\infty} x p_x(x, t') dx \quad - \quad (\text{valor esperado}) \quad (1.10)$$

O segundo pode ser calculado através da expressão

$$E [x(t)] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_0^{+\infty} x(t) dt \quad - \quad (\text{média temporal}) \quad (1.11)$$

Outros parâmetros estatísticos que interessa determinar são o valor quadrático médio e a variância.

O valor quadrático médio, é o valor médio ou esperado de x^2 e pode ser calculado através da expressão

$$E [x^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p_x(x) dx \quad (1.12)$$

A variância, por seu lado, pode ser calculada através da expressão

$$s^2 = E \left[(x - E[x])^2 \right] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E[x])^2 p_x(x) dx \quad (1.13)$$

e representa o valor médio do quadrado do desvio de x em relação ao seu valor médio. O valor da raiz quadrada da variância é denominado desvio padrão (s).

A expressão (1.13) pode ser simplificada como se segue

$$s^2 = E \left[(x - E[x])^2 \right] = E [x^2] - 2E[x]E[x] + (E[x])^2 = E [x^2] - (E[x])^2 \quad (1.14)$$

o que significa que a variância é igual à diferença entre o valor quadrático médio e o quadrado do valor médio.

A seguinte expressão

$$E [x^n] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n p_x(x) dx \quad (1.15)$$

permite calcular os momentos de ordem superior (neste caso o momento de ordem n) que são por vezes importantes para caracterizar estatisticamente um dado processo. Para $n=1$ estaremos perante o valor esperado e para $n=2$ perante o valor quadrático médio.

Uma das funções densidade de probabilidade que é frequentemente utilizada para caracterizar um dado fenómeno, é a função densidade probabilidade correspondente a uma distribuição normal ou Gaussiana.

A expressão que caracteriza essa distribuição é

$$p_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} s} e^{-\frac{(x-m)^2}{2s^2}} \quad (1.16)$$

em que m e s são respectivamente a média e o desvio padrão do processo.

2. Correlação de processos

2.1 Correlação de variáveis

Considerem-se a Figura 2.1 onde estão representadas duas séries de pontos com coordenadas x e y .

Uma simples inspeção dos gráficos permite ver que não existe qualquer correlação entre os valores de x e y do gráfico da Figura 2.1a, enquanto existe uma grande correlação entre os valores representados na Figura 2.1b.

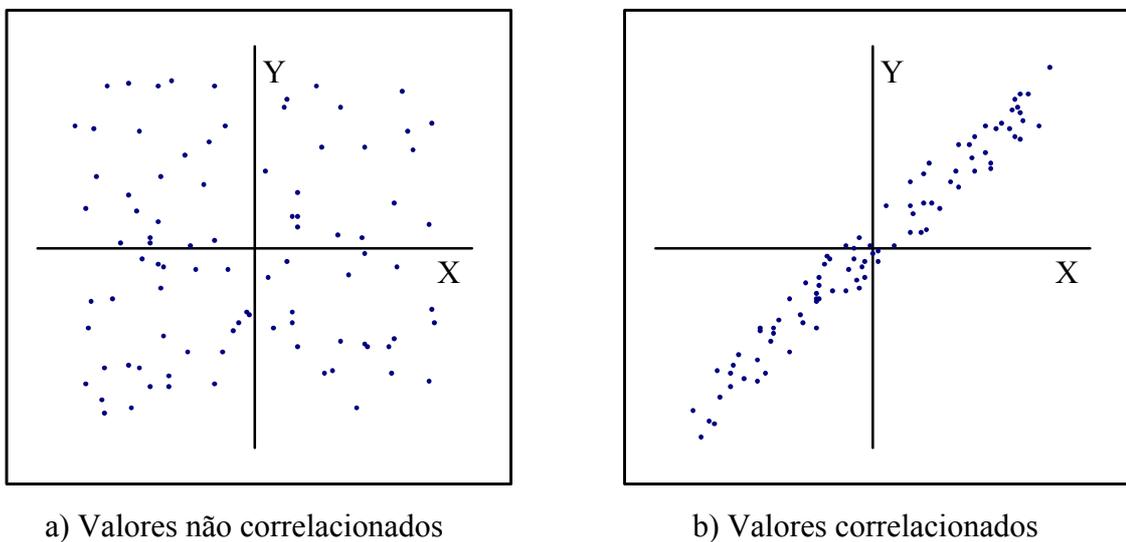


Fig. 2.1 – Correlação entre variáveis

Supondo que as médias dos valores de x e de y são nulas, desejavelmente, seria interessante poder correlacionar ambos os valores através de uma recta que passe na origem e que forneça uma estimativa de y .

$$\bar{y} = ax \tag{2.1}$$

Nesse caso, os desvios de qualquer ponto a essa recta poderiam ser determinados através de

$$e = y - \bar{y} = y - ax \quad (2.2)$$

e o erro quadrático médio, cometido ao considerar a recta interpoladora será

$$E[e^2] = E[(y - ax)^2] = E[y^2] - 2aE[xy] + a^2E[x^2] \quad (2.3)$$

Qual é nesse caso o valor de “a” que minimiza o erro quadrático médio?

A resposta pode ser obtida considerando a condição

$$\frac{dE[e^2]}{da} = 0 = -2E[xy] + 2aE[x^2] \quad (2.4)$$

Assim o valor de “a” que minimiza o erro é

$$a = \frac{E[xy]}{E[x^2]} \quad (2.5)$$

e \bar{y} pode ser melhor estimado através de

$$\bar{y} = \frac{E[xy]}{E[x^2]}x \quad (2.6)$$

Caso os valores médios de x e de y não sejam nulos, poderia deduzir-se que

$$\frac{(\bar{y} - m_y)}{s_y} = \left\{ \frac{E[(x - m_x)(y - m_y)]}{s_x s_y} \right\} \frac{(x - m_x)}{s_x} \quad (2.7)$$

em que m_x e m_y são respectivamente os valores esperados de x e y .

Vê-se assim que o desvio de y relativamente à sua média, normalizado ao seu desvio padrão, pode ser correlacionado com similar valor de x , através de um coeficiente que é denominado coeficiente de correlação e que se pode calcular através de

$$\mathbf{r} = \frac{E[(x - m_x)(y - m_y)]}{\mathbf{s}_x \mathbf{s}_y} \quad - \quad \text{coeficiente de correlação} \quad (2.8)$$

Nos casos em que existe uma correlação perfeita entre y e x , o coeficiente \mathbf{r} toma um valor igual a ± 1 , sendo que quando $\mathbf{r}=1$ os valores correspondentes de x e y têm o mesmo sinal e quando $\mathbf{r}= -1$ os valores correspondentes têm sinal contrário.

Como exemplo de determinação de coeficiente de correlação, considerem-se dois sinais sinusoidais, com amplitudes constantes e a mesma frequência, mas com diferentes fases.

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 \text{sen} \omega t \\ y(t) &= y_0 \text{sen}(\omega t + \mathbf{f}) \end{aligned} \quad (2.9)$$

Qual é a correlação entre esses dois sinais? Se forem obtidos pares de valores x e y em determinados instantes, é possível determinar o coeficiente de correlação entre esses valores, podendo para isso observar-se o que se passa num período $T=2\mathbf{p}/\omega$.

Dado os sinais serem sinusoidais pode verificar-se que $m_x = m_y = 0$ e poderia demonstrar-se que $\mathbf{s}_x^2 = x_0^2/2$ e que $\mathbf{s}_y^2 = y_0^2/2$. Nesse caso, pode-se determinar o coeficiente de correlação, usando a equação (2.8), calculando

$$\mathbf{r} = \frac{E[(x_0 \text{sen} \omega t_0)(y_0 \text{sen}(\omega t_0 + \mathbf{f}))]}{x_0 y_0 / 2} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} x_0 y_0 \text{sen}(\omega t_0) \text{sen}(\omega t_0 + \mathbf{f}) p(t_0) dt_0}{x_0 y_0 / 2} \quad (2.10)$$

Considerando apenas um intervalo de tempo correspondente ao um período T e dado que $p(t_0)$ é uniforme nesse intervalo e igual a $\omega/2\mathbf{p}$, resulta que

$$\begin{aligned}
 r &= \frac{x_0 y_0 \frac{W}{2p}}{x_0 y_0} \int_0^{\frac{2p}{w}} \text{sen}(wt_0) \text{sen}(wt_0 + f) dt_0 = & (2.11) \\
 &= \frac{W}{p} \int_0^{\frac{2p}{w}} \text{sen}^2(wt_0) \cos(f) + \text{sen}(wt_0) \cos(wt_0) \text{sen} f dt_0 = \\
 &= \frac{W}{p} \int_0^{\frac{2p}{w}} \text{sen}^2(wt_0) \cos(f) = \cos f
 \end{aligned}$$

Resulta do obtido, que a correlação entre os dois sinais é máxima quando a defasagem entre os dois sinais é nula ($f=0$ ou $2p$) ou quando os sinais estão totalmente desfasados ($f=p$), e mínima para $f=p/2$ ou $3p/2$.

2.2 Função de autocorrelação

A função de autocorrelação de um processo estocástico é definida como o valor esperado (ou média para todas as realizações do processo) do produto $\{x(t).x(t+\mathbf{t})\}$. Para obter essa função, obtém-se o valor de cada registo num dado instante t e outra vez num dado instante $t+\mathbf{t}$. Seguidamente calcula-se, para cada uma das realizações do processo, o produto desses dois valores (em função de \mathbf{t}). Finalmente obtém-se (também em função de \mathbf{t}) a média desses produtos para todas as realizações do processo. A função assim obtida é geralmente função das variáveis t e \mathbf{t} , mas, caso o processo seja estacionário, não depende do instante t , e é denominada $R_x(\mathbf{t})$.

$$R_x(\mathbf{t}) = E [x(t) x(t + \mathbf{t})] \quad (2.12)$$

A Figura 1.3 ilustra também a forma como um valor específico da função de autocorrelação (para um dado valor de τ) pode ser obtido. Multiplicando, para cada realização, o valor da função para $t=t_1$ pelo valor da mesma função para $t=t_2$, e fazendo a média para todas as realizações, obter-se-ia o valor da função de autocorrelação para $\mathbf{t}=(t_2-t_1)$. Repetindo este processo para diferentes valores de τ , a função de autocorrelação seria determinada.

No caso de os processos serem estacionários, a média e a variância do sinal são invariantes com o tempo e assim, o coeficiente de autocorrelação (ver equação 2.8) pode ser definido como

$$r = \frac{E[(x(t) - m)(x(t + \mathbf{t}) - m)]}{\mathbf{s}^2} = \frac{E[x(t)x(t + \mathbf{t})] - mE[x(t + \mathbf{t})] - mE[x(t)] + m^2}{\mathbf{s}^2} \quad (2.13)$$

Dado que a média é invariante com o tempo, a equação (2.13) resulta em

$$r = \frac{E[x(t)x(t + \mathbf{t})] - m^2 - m^2 + m^2}{\mathbf{s}^2} = \frac{R_x(\mathbf{t}) - m^2}{\mathbf{s}^2} \quad (2.14)$$

ou seja

$$R_x(\mathbf{t}) = \mathbf{s}^2 r + m^2 \quad (2.15)$$

Como o coeficiente de correlação varia entre -1 e 1 , daqui resulta que a função de autocorrelação também está limitada entre dois valores

$$-\mathbf{s}^2 + m^2 \leq R_x(\mathbf{t}) \leq \mathbf{s}^2 + m^2 \quad (2.16)$$

Para $\mathbf{t} = 0$

$$R_x(0) = E[x(t)x(t + 0)] = E[x^2(t)] = \mathbf{s}^2 + m^2 \quad (2.17)$$

e o valor da função de autocorrelação não é mais do que o valor quadrático médio, igual à soma da variância com o quadrado da média.

Para $\mathbf{t} = \infty$, o coeficiente de autocorrelação é igual a zero, pois não haverá correlação entre os sinais e daí resulta que

$$R_x(\mathbf{t} \Rightarrow \infty) = m^2 \quad (2.18)$$

ou seja, o valor da função de autocorrelação é igual ao quadrado da média.

Uma outra propriedade da função de autocorrelação para processos estacionários, é a de ser uma função par, já que, dado que o valor esperado não varia com o tempo

$$R_x(\mathbf{t}) = E [x(t) x(t + \mathbf{t})] = E [x(t - \mathbf{t}) x(t)] = R_x(-\mathbf{t}) \quad (2.19)$$

Na figura 2.2, apresenta-se uma função de autocorrelação típica de um processo estacionário, indicando-se os seus valores máximo e assintóticos para $\mathbf{t} = \pm \infty$.

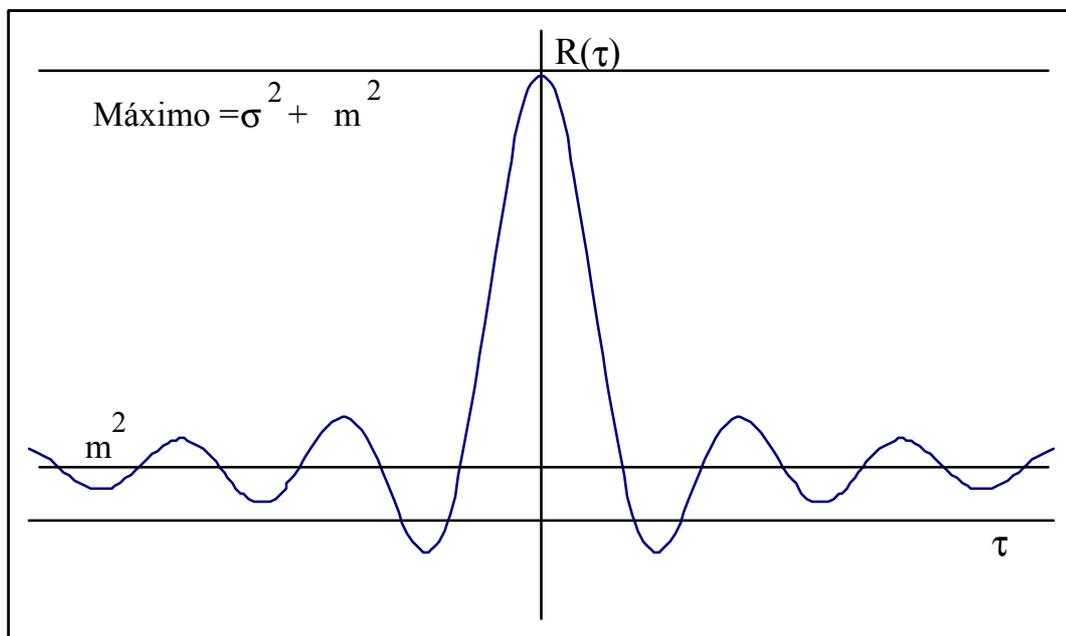


Fig. 2.2 – Características da função de autocorrelação

A função de autocorrelação contém, como se pode observar, toda a informação estatística relevante sobre o processo. Para além disso, permite conhecer como é que os valores variam com o tempo e como é que se interrelacionam entre si. É portanto uma forma alternativa de descrição dos processos, com grande utilidade na avaliação estatística dos mesmos.

2.3 Correlação cruzada

A função de correlação cruzada para duas variáveis x e y é definida como o valor esperado do produto de $x(t) y(t+\mathbf{t})$ ou $y(t) x(t+\mathbf{t})$.

$$\begin{aligned} R_{xy}(\mathbf{t}) &= E [x(t) y(t+\mathbf{t})] \\ R_{yx}(\mathbf{t}) &= E [y(t) x(t+\mathbf{t})] \end{aligned} \quad (2.20)$$

Pode demonstrar-se que estas funções não são iguais e não são funções pares.

Na verdade, se ambos os processos forem estacionários

$$R_{xy}(\mathbf{t}) = E [x(t) y(t+\mathbf{t})] = E [y(t) x(t-\mathbf{t})] = R_{yx}(-\mathbf{t}) \quad (2.21)$$

Demonstrar-se-ia da mesma forma que

$$R_{yx}(\mathbf{t}) = R_{xy}(-\mathbf{t}) \quad (2.22)$$

Finalmente pode dizer-se que as funções de correlação cruzada são funções contidas dentro de limites, sendo possível provar que

$$-\mathbf{s}_x \mathbf{s}_y + m_x m_y \leq R_{xy}(\mathbf{t}) \leq \mathbf{s}_x \mathbf{s}_y + m_x m_y \quad (2.23)$$

e que tendem assintoticamente para $(m_x m_y)$ quando \mathbf{t} tende para infinito.

3. Densidade espectral

3.1 Noção de densidade espectral

Considere-se uma realização de um processo $x(t)$. Note-se que a condição

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| dt < \infty \quad (3.1)$$

que é a condição necessária para que se possa encontrar a transformada de Fourier de uma função, não pode ser satisfeita, dado que tal requereria que $x(t)$ tendesse para zero para $t = \pm\infty$.

Por outro lado, sabe-se que, se um processo tem média nula, a função de autocorrelação tende para zero para $t = \pm\infty$.

Então, se um determinado processo estocástico é estacionário e tem média nula pode dizer-se que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |R_x(t)| dt < \infty \quad (3.2)$$

Nesse caso pode determinar-se a transformada de Fourier da função de autocorrelação através da expressão

$$S_x(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} R_x(t) e^{-i\omega t} dt \quad (3.3)$$

sendo a transformada inversa calculada pela expressão

$$R_x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_x(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (3.4)$$

$S_x(\omega)$, a transformada de Fourier da função de autocorrelação é denominada a densidade espectral do processo $x(t)$. A densidade espectral é, portanto, a transposição da função de autocorrelação (e indirectamente do sinal em questão) para o domínio da frequência, com a particularidade de as suas unidades serem unidades iguais ao quadrado das unidades do sinal, por unidade de frequência.

Com efeito, lembrando que $R_x(0) = E[x^2]$ e notando que

$$R_x(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_x(\omega) 1 d\omega \quad (3.5)$$

pode-se concluir que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} S_x(\omega) d\omega = E[x^2] \quad (3.6)$$

ou seja que a área sob a curva que representa a função densidade espectral é igual ao valor quadrático médio do processo. Dado que a função densidade espectral é definida no domínio da frequência conclui-se que as suas unidades são unidades iguais ao quadrado das unidades de $x(t)$ por unidade de frequência. Dessa forma, supondo por exemplo, que o sinal que se analisa é uma aceleração, as unidades da densidade espectral serão em $(m^2 s^{-4} / s^{-1})$ ou seja $(m^2 s^{-3})$.

Nesse caso, de o sinal em causa ser um registo de acelerações, por exemplo um acelerograma, a densidade espectral costuma ser designada por densidade espectral de potência, ou vulgarmente espectro de potência.

A razão dessa denominação resulta das unidades da função densidade espectral serem nesse caso acelerações² por unidade de frequência que, considerando o produto por uma massa unitária, são unidades de potência (FLT^{-1}). Por essa razão ainda, é vulgar referir-se que a função densidade espectral de potência contém a informação sobre a energia de um sinal sísmico. Na verdade, para se poder obter a energia, haveria que multiplicar essa potência por um intervalo de tempo e admitir que essa potência era constante durante esse intervalo, o que só seria verdadeiro se o sinal em causa fosse um sinal estacionário.

Para um dado intervalo de frequência ($D\omega$), a área sob a função $S(\omega)$ representa a potência associada à frequência central desse intervalo. Este facto permite que, a partir da função densidade espectral, seja possível “reconstituir”, do ponto de vista estatístico, um dado sinal, desde que seja possível admitir a estacionaridade do processo. Um dos métodos para a geração de acelerogramas artificiais a partir de espectros de potência recorre a este facto.

Entre as principais características da função densidade espectral estão, para além da já enunciada de a área sob a sua curva ser igual ao valor quadrático médio do processo, a de ser uma função real, par e não negativa.

Como se viu, se se imaginar que um sinal estocástico estacionário pode decompor-se no somatório de um número infinito de sinais com frequências espaçadas de $D\omega$, pode dizer-se que a densidade espectral é, para cada intervalo de frequência $D\omega$, a “potência” associada com esse intervalo de frequência.

Como exemplo, atente-se na seguinte densidade espectral ilustrada na Figura 3.1.

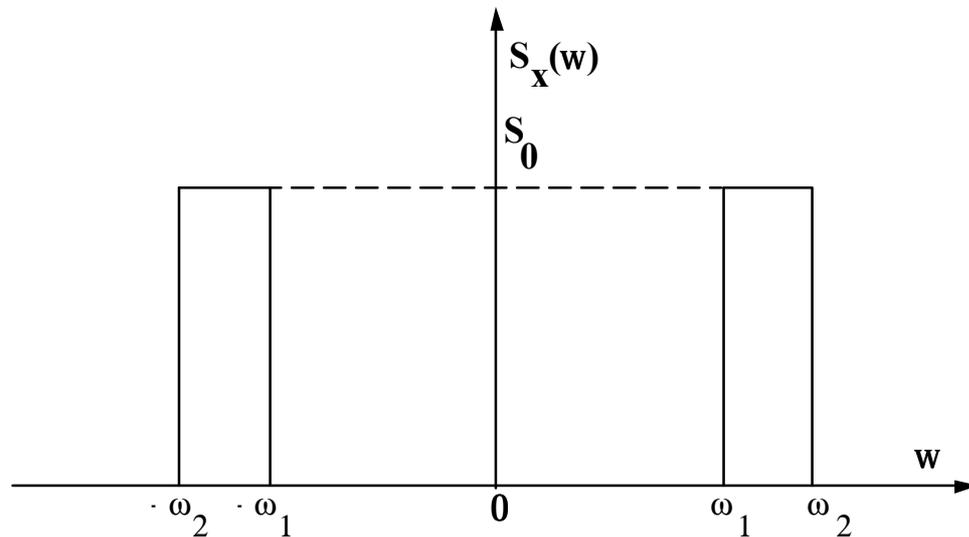


Fig. 3.1 – Densidade espectral de um processo de banda estreita

O valor quadrático médio e a função de autocorrelação podem ser determinados como se segue

$$E[x^2] = \text{Área debaixo de } S_x(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_x(\omega) d\omega = 2S_0(\omega_2 - \omega_1) \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned} R_x(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} S_x(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} S_x(\omega) [\cos(\omega t) + i \text{sen}(\omega t)] d\omega = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} S_x(\omega) \cos(\omega t) d\omega + i \int_{-\infty}^{+\infty} S_x(\omega) \text{sen}(\omega t) d\omega \end{aligned} \quad (3.8)$$

O segundo termo da expressão anterior é nulo, já que sendo $S_x(\omega)$ uma função par e o seno uma função ímpar, o produto é uma função ímpar cujo integral é nulo. Assim sendo, a expressão 3.8 resulta em

$$R_x(t) = 2S_0 \int_{\omega_1}^{\omega_2} \cos(\omega t) d\omega = \frac{2S_0}{t} [\text{sen}(\omega_2 t) - \text{sen}(\omega_1 t)] = \quad (3.9)$$

$$= \frac{4S_0}{t} \cos\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2} t\right) \text{sen}\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t\right)$$

Esta função tem um andamento semelhante ao da apresentada na Figura 2.2.

A função densidade espectral representada na Figura 3.1 corresponde a um processo dito de banda estreita. Um processo de banda estreita é um processo que recebe contribuição de componentes (sinais sinusoidais) com frequências contidas numa zona limitada do espectro, no caso da Figura 3.1 frequências situadas numa zona espectral limitada, já que $\omega_1 \gg \omega_2$.

Na figura 3.2 pode ser visualizada uma realização do processo que tem a densidade espectral semelhante à constante da Figura 3.1. Como pode ser visto, este processo é um processo de banda estreita, já que o sinal tem nitidamente uma frequência predominante

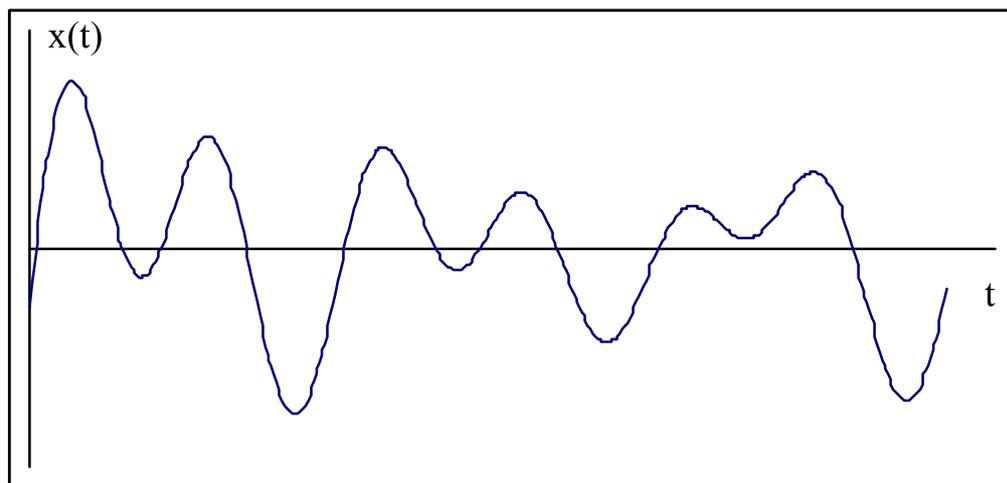


Fig. 3.2 – Realização de um processo de banda estreita

Na Figura 3.3 mostra-se a densidade espectral de um processo de banda larga. Neste caso, as duas frequências extremas do intervalo são consideravelmente diferentes uma da outra.

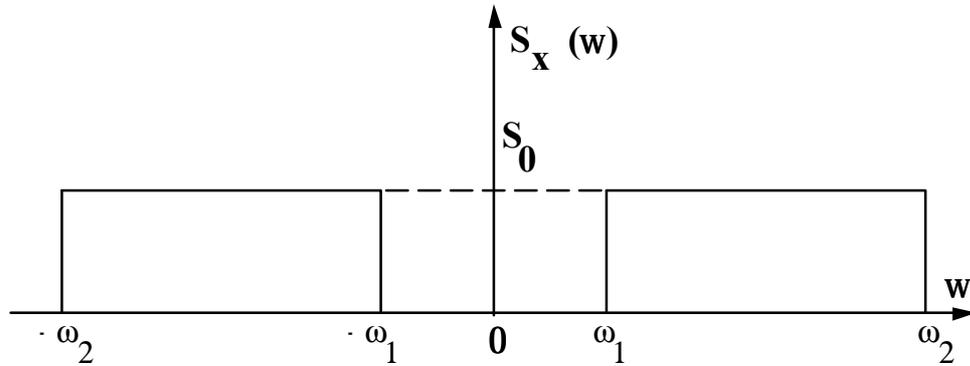


Fig. 3.3 – Densidade espectral de um processo de banda larga

Uma realização deste processo de banda larga pode ser visualizada na Figura 3.4. Como se pode ver, este processo é um processo de banda larga, já que o sinal tem nitidamente uma contribuição de várias frequências.

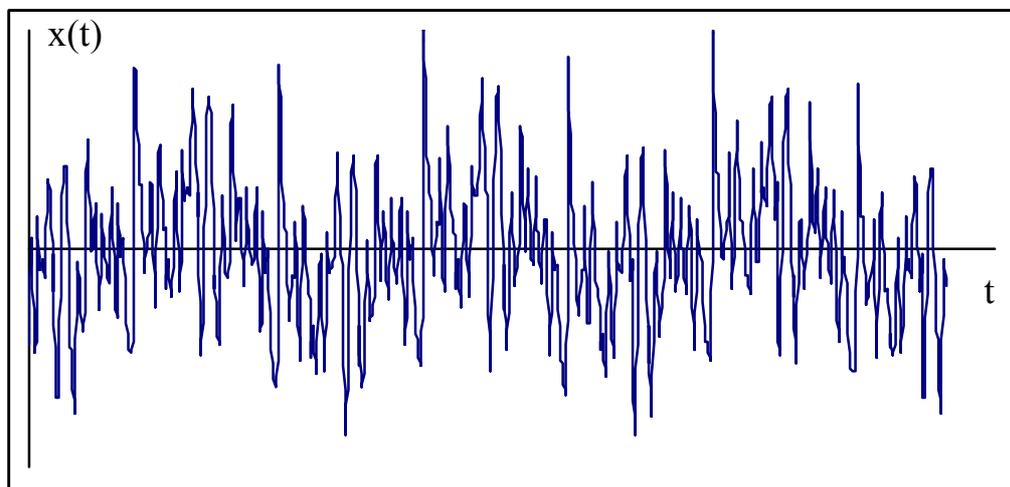


Fig. 3.4 – Realização de um processo de banda larga

Um processo de banda larga que interessa conhecer é o chamado ruído branco (“white noise”), que é caracterizado por ter igual contribuição em todas as frequências, pelo que a sua densidade espectral tem um valor constante entre $-\infty$ e $+\infty$. Note-se que este tipo de processo é meramente teórico, já que o seu valor quadrático médio (área debaixo da linha definidora da densidade espectral) é infinito. No entanto, o conceito pode, como se verá, ser por vezes utilizado para inferir características da resposta de sistemas a processos de banda larga.

Poderia mostrar-se que a transformada de Fourier de um processo de ruído branco com amplitude S_0 , é uma função de Dirac centrada na origem e com uma “área” igual a $2pS_0$. Tal significa que a respectiva função de autocorrelação pode ser escrita como

$$R_x(\mathbf{t}) = 2pS_0 \delta(\mathbf{t}) \quad (3.10)$$

e que, dado o número infinito de frequências que contribuem para o sinal, não existe correlação do sinal com ele próprio, excepto para $\mathbf{t}=0$, quando a correlação é efectuada com o valor do sinal no próprio instante, ou seja com o próprio valor.

3.2 Densidade Espectral de Processos Derivados

Um processo derivado pode definir-se como um processo que pode ser descrito através de outro por derivação deste. Um exemplo de um processo derivado é um processo relativo a velocidades ou acelerações que pode ser inferido através do correspondente processo relativo a deslocamentos.

Quais são então as características de um processo derivado que podem ser inferidas ou derivadas do processo original?

Tal como foi já visto, a função de autocorrelação é definida como

$$R_x(\mathbf{t}) = E [x(t) x(t + \mathbf{t})] \quad (2.12 \text{ rep.})$$

e a média para o conjunto das realizações

$$R_x(\mathbf{t}) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N [x_n(t) x_n(t + \mathbf{t})] \quad (3.11)$$

Como se pode então obter a função de autocorrelação de processos derivados?

Diferenciando a equação (3.11) termo a termo, em relação a \mathbf{t} , e assumindo estacionaridade, obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\mathbf{t}}(R_x(\mathbf{t})) &= \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \frac{d}{d\mathbf{t}} [x_n(t) x_n(t+\mathbf{t})] = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N [x_n(t) \dot{x}_n(t+\mathbf{t})] = \\ &= E[x(t) \dot{x}(t+\mathbf{t})] = E[x(t-\mathbf{t}) \dot{x}(t)] \end{aligned} \quad (3.12)$$

Se a expressão (3.12) for novamente diferenciada em relação a \mathbf{t} , obtém-se por sua vez

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{d\mathbf{t}^2}(R_x(\mathbf{t})) &= \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \frac{d}{d\mathbf{t}} [x(t-\mathbf{t}) \dot{x}(t)] = -\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N [\dot{x}(t-\mathbf{t}) \dot{x}(t)] = \\ &= E[\dot{x}(t-\mathbf{t}) \dot{x}(t)] = -R_{\dot{x}}(\mathbf{t}) \end{aligned} \quad (3.13)$$

Por outro lado, da relação entre a função de autocorrelação e a densidade espectral pode concluir-se que

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\mathbf{t}}(R_x(\mathbf{t})) &= \int_{-\infty}^{+\infty} S_x(\mathbf{w}) i\mathbf{w} e^{i\mathbf{w}\mathbf{t}} d\mathbf{w} \\ \frac{d^2}{d\mathbf{t}^2}(R_x(\mathbf{t})) &= -\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{w}^2 S_x(\mathbf{w}) e^{i\mathbf{w}\mathbf{t}} d\mathbf{w} \end{aligned} \quad (3.14)$$

Juntando os resultados das equações (3.13) e (3.14) pode então concluir-se que

$$R_{\dot{x}}(\mathbf{t}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{w}^2 S_x(\mathbf{w}) e^{i\mathbf{w}\mathbf{t}} d\mathbf{w} = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{\dot{x}}(\mathbf{w}) e^{i\mathbf{w}\mathbf{t}} d\mathbf{w} \quad (3.15)$$

Tal permite concluir que

$$S_{\dot{x}}(\mathbf{w}) = \mathbf{w}^2 S_x(\mathbf{w}) \quad (3.16)$$

$$E[\dot{x}^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{\dot{x}}(\mathbf{w}) d\mathbf{w} = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{w}^2 S_x(\mathbf{w}) d\mathbf{w} \quad (3.17)$$

$$S_{\ddot{x}}(\omega) = \omega^4 S_x(\omega) \quad (3.18)$$

$$E[\ddot{x}^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{\ddot{x}}(\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^4 S_x(\omega) d\omega \quad (3.19)$$

3.3 Densidade espectral teórica e experimental

Sempre que se torna necessário determinar experimentalmente uma densidade espectral, torna-se necessário utilizar limites diferentes dos atrás enunciados e, muitas das vezes expressar a frequência em outras unidades (Hertz em vez de radianos por segundo).

Com efeito, nas definições atrás efectuadas, considerou-se que a função era definida no intervalo $[-\infty; +\infty]$ e que a unidade de frequência era expressa em radianos por segundo.

De um ponto de vista prático, interessa considerar uma função que seja definida para frequências positivas e com as unidades expressas em Hertz (*Hz*).

Essa nova função que se denominará $W(f)$ pode ser relacionada com $S(\omega)$ tendo em conta que o seu integral deve continuar a ser o valor quadrático médio

$$E[x^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} S_x(\omega) d\omega = \int_0^{+\infty} W_x(f) df \quad (3.20)$$

Considerando a igualdade das áreas e a relação $\omega = 2\pi f$, pode dizer-se que

$$W_x(f) df = W_x(f) \frac{d\omega}{2\pi} = 2S_x(\omega) d\omega \quad (3.21)$$

de onde resulta que

$$W_x(f) = 4\pi S_x(\omega) \quad (3.22)$$

4. Relações excitação-resposta para sistemas lineares

4.1 Introdução

Um dos principais objectivos do estudo de processos estocásticos aplicados a vibrações em estruturas é o de conseguir caracterizar a resposta de um sistema estrutural, através do conhecimento das características desse sistema e das características das acções que sobre ele actuam.

No estudo que seguidamente se apresenta, considera-se que os sistemas em análise têm comportamento física e geometricamente linear e invariável com o tempo.

Considerar-se-á ainda, que o sistema pode ser actuado por excitações singulares ou múltiplas, prevendo-se a possibilidade de analisar uma ou mais respostas.

Na figura 4.1 apresenta-se um esquema das relações que se pretendem estudar, em que o sistema estrutural é idealizado como um filtro, pelo qual as excitações são convertidas em respostas estruturais.

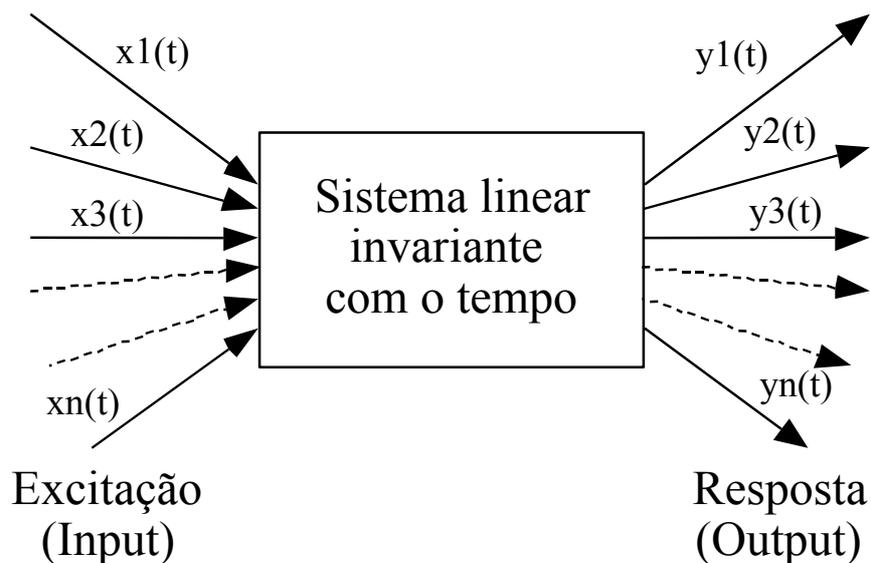


Fig. 4.1 – Relações excitação-resposta para sistemas lineares.

De um ponto de vista prático, pode-se idealizar uma situação em que um sistema estrutural é actuado por uma ou mais excitações, tais como sismo, vento, vibrações induzidas pelo tráfego, etc. e a sua resposta a cada uma destas acções pode ser analisada em vários locais de uma estrutura e em termos de diversas grandezas, como acelerações, velocidades, deslocamentos, esforços internos, etc.

Nesse caso, cada resposta estrutural (por exemplo deslocamento num dado grau de liberdade) pode ser relacionado com uma dada excitação (por exemplo uma força aplicada noutra grau de liberdade) através de leis que se pretendem conhecer.

O que se analisará de seguida são as formas como, conhecida a excitação e as características do sistema linear, pode ser conhecida a resposta, ou, como conhecida a resposta e as características do sistema, pode ser inferida a excitação.

As técnicas que serão descritas têm ainda aplicação na identificação dinâmica de sistemas estruturais ou seja, através do conhecimento da excitação e da resposta proceder à determinação das características do sistema. Como se verá depois, tal permitirá, por exemplo, determinar as frequências próprias de um edifício, a partir dos registos da resposta estrutural a uma dada acção para a qual sejam também conhecidas as características.

4.2 Procedimento clássico de análise de relações excitação-resposta

Imagine-se um sistema estrutural composto por um sistema de um grau de liberdade, tal como representado na Figura 4.2.

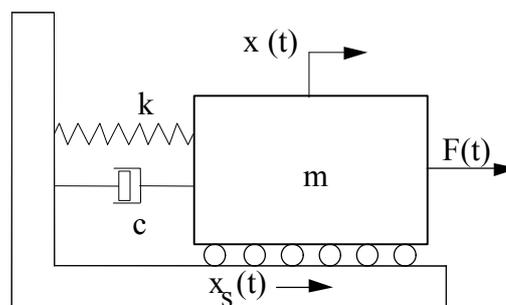


Fig. 4.2 – Sistema de um grau de liberdade

Imagine-se ainda que o sistema é sujeito a uma força exterior $F(t)$ ou a um movimento do seu apoio, $x_s(t)$.

As equações de movimento para cada uma das situações atrás descritas são

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t) \quad (4.1a)$$

$$m\ddot{x}_r + c\dot{x}_r + kx_r = -m\ddot{x}_s \quad \text{com} \quad x_r = x - x_s \quad (4.1b)$$

As equações (4.1a) e (4.1b) são equações diferenciais lineares, que permitem determinar $x(t)$, conhecidas as condições iniciais do movimento e as excitações $F(t)$ ou $x_s(t)$. No entanto, no caso de se estar perante uma excitação aleatória, a resolução da equação não será em princípio possível, já que a excitação não pode ser expressa através de uma equação matemática.

Considerem-se então as equações (4.1a) e (4.1b) rescritas sob a forma

$$\ddot{x} + 2\alpha p\dot{x} + p^2 x = p^2 f(t) \quad (4.2)$$

em que

$$\alpha = \frac{c}{2\sqrt{km}}$$

$$p^2 = \frac{k}{m}$$

$$f(t) = \frac{F(t)}{k} \quad \text{na equação (4.1)}$$

$$f(t) = -\frac{\ddot{x}_s}{p^2} \quad \text{na equação (4.2)}$$

Suponha-se que $f(t)$ pode ser escrito sobre a forma

$$f(t) = f_0 \text{sen}(\omega t) \quad (4.3)$$

Então, a função

$$x(t) = x_0 \text{sen}(\omega t - \mathbf{f}) \quad (4.4)$$

descreve a resposta do sistema, em que x_0 e \mathbf{f} são respectivamente a amplitude e a fase da resposta.

Define-se “função de transferência” como a razão entre a amplitude do movimento e a amplitude da força e a defasagem entre a excitação e a resposta a qual define as características do sistema para uma dada frequência “ ω ”. Nesse caso, em vez de se pensar na razão de amplitudes e na fase como duas entidades separadas, pode usar-se uma variável complexa que represente ambas as quantidades.

A função de transferência, definida no domínio da frequência, que estabelece a relação entre a excitação e a resposta, é vulgarmente designada por $H(\omega)$.

Para determinar essa função considere-se que a expressão (4.3) é rescrita da seguinte forma:

$$f(t) = f_0 \text{sen}(\omega t) = f_0 \text{Im}\{e^{i\omega t}\} \quad (4.5)$$

designando “ Im ” “a parte imaginária de”.

Nessas condições

$$x(t) = f_0 \text{Im}\{H(\omega)e^{i\omega t}\} \quad (4.6a)$$

$$\dot{x}(t) = f_0 \text{Im}\{H(\omega)i\omega e^{i\omega t}\} \quad (4.6b)$$

$$\ddot{x}(t) = f_0 \text{Im}\{-H(\omega)\omega^2 e^{i\omega t}\} \quad (4.6c)$$

Substituindo as equações (4.5), (4.6a), (4.6b) e (4.6c) na equação (4.2) obtém-se

$$\begin{aligned} f_0 \text{Im}\{-H(\omega)\omega^2 e^{i\omega t}\} + 2\zeta p f_0 \text{Im}\{H(\omega)i\omega e^{i\omega t}\} \\ + p^2 f_0 \text{Im}\{H(\omega)e^{i\omega t}\} = p^2 f_0 \text{Im}\{e^{i\omega t}\} \end{aligned} \quad (4.7a)$$

Rescrevendo esta equação retirando a referência à parte imaginária, mas sempre tendo em conta que a solução para $x(t)$ é ainda a parte imaginária, obtém-se a seguinte equação

$$\begin{aligned} -f_0 H(\mathbf{w}) \mathbf{w}^2 e^{i\mathbf{w}t} + 2\mathbf{x}p f_0 H(\mathbf{w}) i\mathbf{w} e^{i\mathbf{w}t} \\ + p^2 f_0 H(\mathbf{w}) e^{i\mathbf{w}t} = p^2 f_0 e^{i\mathbf{w}t} \end{aligned} \quad (4.7b)$$

Por sua vez, cancelando os termos $f_0 e^{i\mathbf{w}t}$ em ambos os lados da equação (4.7b) resulta

$$-H(\mathbf{w}) \mathbf{w}^2 + 2\mathbf{x}p H(\mathbf{w}) i\mathbf{w} + p^2 H(\mathbf{w}) = p^2 \quad (4.7c)$$

de onde se pode concluir que

$$H(\mathbf{w}) = \frac{p^2}{-\mathbf{w}^2 + 2i\mathbf{x}\mathbf{w}p + p^2} \quad (4.8)$$

A equação (4.8) pode ser escrita sob a forma $A(\mathbf{w}) - i B(\mathbf{w})$

$$H(\mathbf{w}) = \frac{\left\{ 1 - \left(\frac{\mathbf{w}}{p} \right)^2 \right\} - i \left\{ 2\mathbf{x} \left(\frac{\mathbf{w}}{p} \right) \right\}}{\left\{ 1 - \left(\frac{\mathbf{w}}{p} \right)^2 \right\}^2 + \left\{ 2\mathbf{x} \left(\frac{\mathbf{w}}{p} \right) \right\}^2} \quad (4.9)$$

A magnitude e a fase da função transferência $H(\mathbf{w})$ são então

$$|H(\mathbf{w})| = \sqrt{A^2(\mathbf{w}) + B^2(\mathbf{w})} \quad (4.10)$$

$$\mathbf{f} = \arctan\left(\frac{B(\mathbf{w})}{A(\mathbf{w})}\right) \quad (4.11)$$

Como se verá, para além de permitir calcular a amplitude e a fase da resposta, a função $H(\mathbf{w})$ irá permitir calcular as características da densidade espectral de uma resposta $y(\mathbf{w})$ conhecida a densidade espectral de uma excitação $x(\mathbf{w})$.

4.3 Método da resposta impulsiva

Enquanto a função de transferência permite determinar a resposta de um sistema linear no domínio da frequência, ou seja quando a variável independente é a frequência, o método da resposta impulsiva permite efectuar essa determinação no domínio do tempo.

Um impulso é definido como uma perturbação instantânea de um sistema, da qual resulta uma resposta transitória. Este impulso é normalmente representado através de uma função de Dirac, tal que

$$x(t) = I \mathbf{d}(t_0) \quad (4.12)$$

$$I = \text{Magnitude do impulso} \quad (4.13)$$

$$\mathbf{d}(t_0) = \begin{cases} \infty & \text{para } t = t_0 \\ 0 & \text{para } t \neq t_0 \end{cases} \quad (4.14)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{d}(t) dt = 1 \quad (4.15)$$

em que I tem unidades de (*força x tempo*).

Se I tiver um valor unitário, a resposta é designada por função de transferência a um impulso unitário.

No caso de a excitação ser uma função contínua no tempo, a resposta em qualquer instante “ t ”, pode ser calculada como a soma das respostas a uma série de impulsos que tenham ocorrido anteriormente, sendo no limite o integral a que se chama o integral de convolução

$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(\mathbf{t}) h(t - \mathbf{t}) d\mathbf{t} \quad (4.16)$$

em que $h(t - \mathbf{t})$ é a o valor da resposta no instante “ t ”, a um impulso unitário aplicado no instante “ \mathbf{t} ”, utilizado por exemplo no integral de Duhamel, e que pode ser calculado através de

$$h(t - \mathbf{t}) = \frac{e^{-\mathbf{x}p(t-\mathbf{t})}}{mp\sqrt{1-\mathbf{x}^2}} \text{sen}\left(\sqrt{1-\mathbf{x}^2} p(t - \mathbf{t})\right) \quad (4.17)$$

4.4 Relação entre $H(\mathbf{w})$ e $h(t)$

Já que tanto a função $H(\mathbf{w})$ como a função $h(t)$ permitem determinar a relação entre uma excitação e a correspondente resposta, deve ser possível estabelecer-se uma relação entre elas.

Atente-se que sendo a excitação $x(t)$ um impulso unitário $\mathbf{d}(t)$, e a resposta $y(t)$ a função $h(t)$, pode mostrar-se que as transformadas de Fourier de $x(t)$ e $y(t)$, respectivamente $X(\mathbf{w})$ e $Y(\mathbf{w})$, podem ser obtidas da seguinte forma

$$\begin{aligned} X(\mathbf{w}) &= \frac{1}{2\mathbf{p}} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-i\mathbf{w}t} dt = \frac{1}{2\mathbf{p}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{d}(t) e^{-i\mathbf{w}t} dt = \\ &= \frac{1}{2\mathbf{p}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{d}(t) \cos(\mathbf{w}t) dt - i \frac{1}{2\mathbf{p}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{d}(t) \text{sen}(\mathbf{w}t) dt = \frac{1}{2\mathbf{p}} \end{aligned} \quad (4.18a)$$

$$Y(\mathbf{w}) = \frac{1}{2\mathbf{p}} \int_{-\infty}^{+\infty} y(t) e^{-i\mathbf{w}t} dt = \frac{1}{2\mathbf{p}} \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) e^{-i\mathbf{w}t} dt \quad (4.18b)$$

Tendo em conta que

$$Y(\mathbf{w}) = H(\mathbf{w}) X(\mathbf{w}) \quad (4.19)$$

pode demonstrar-se que $H(\mathbf{w})$ e $h(t)$ estão relacionados como se segue

$$H(\mathbf{w}) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) e^{-i\mathbf{w}t} dt \quad (4.20)$$

e consequentemente

$$h(t) = \frac{1}{2\mathbf{p}} \int_{-\infty}^{+\infty} H(\mathbf{w}) e^{i\mathbf{w}t} d\mathbf{w} \quad (4.21)$$

sendo $H(\mathbf{w})$ e $h(t)$ um par de transformadas de Fourier.

4.5 Transmissão de vibrações

4.5.1 – Propriedades de $h(t)$

Conhecendo as relações excitação-resposta para sistemas lineares, pode-se estudar o problema da transmissão de vibrações aleatórias, ou seja, conhecendo as características das vibrações, determinar a natureza da resposta de sistemas lineares.

Interessa assim examinar como determinar as características da resposta de um sistema linear $y(t)$ a uma excitação $x(t)$, supondo que se conhece a função de transferência a um impulso unitário $h(t)$.

Comece-se por analisar diferentes formas de rescrever a equação (4.16). Com efeito, atendendo a que $h(t-t)$ é a resposta no instante “ t ” para um impulso aplicado no instante “ t ”, pode concluir-se que essa função é nula para valores de “ t ” inferiores a “ t ”, ou seja, o impulso não causa qualquer resposta antes de ser aplicado. Dada essa circunstância, os limites do integral da equação (4.16) podem ser alterados como se segue

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) h(t-t) dt \quad (4.22)$$

Por outro lado, considerando uma nova variável $q=t-t$, que representa o tempo que decorre entre o instante de aplicação do impulso e o instante da medição da resposta, os limites de integração $t=-\infty$ e $t=t$, transformam-se em $q=-\infty$ e $q=0$, e a equação (4.16) pode ser rescrita como

$$y(t) = \int_{-\infty}^0 x(t-q) h(q) (-dq) = \int_0^{\infty} x(t-q) h(q) dq \quad (4.23)$$

que tendo em conta o facto de $h(q)=0$ para $q < 0$, leva a que a equação possa ser escrita como

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-q) h(q) dq \quad (4.24)$$

As equações (4.16), (4.22), (4.23) e (4.24) são assim formas alternativas de determinar a resposta a uma excitação $x(t)$.

4.5.2 – Valor médio de resposta

Considere-se um sistema sujeito a duas excitações estacionárias $x_1(t)$ e $x_2(t)$.

A sua resposta a essas excitações pode ser obtida através de

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(t - \mathbf{q}) h_1(\mathbf{q}) d\mathbf{q} + \int_{-\infty}^{+\infty} x_2(t - \mathbf{q}) h_2(\mathbf{q}) d\mathbf{q} \quad (4.25)$$

Dada a estacionaridade, o valor médio da resposta pode ser calculado por

$$E[y(t)] = E[x_1] \int_{-\infty}^{+\infty} h_1(\mathbf{q}) d\mathbf{q} + E[x_2] \int_{-\infty}^{+\infty} h_2(\mathbf{q}) d\mathbf{q} \quad (4.26)$$

pelo que se conclui que $y(t)$ é também estacionário.

Se se utilizar o domínio da frequência, torna-se mais fácil calcular o valor médio da resposta, já que, relembrando a equação (4.20)

$$H(\mathbf{w} = 0) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) dt \quad (4.27)$$

a equação (4.26) pode ser reescrita como

$$E[y] = E[x_1] H_1(0) + E[x_2] H_2(0) \quad (4.28)$$

que mostra os valores médios da resposta e da excitação relacionados por $H(0)$.

4.5.3 – Função de autocorrelação e densidade espectral da resposta

A função de autocorrelação da resposta $y(t)$ é definida como

$$\begin{aligned} E[y(t) y(t + \mathbf{t})] = & E \left[\int_{-\infty}^{+\infty} h_1(\mathbf{q}_1) x_1(t - \mathbf{q}_1) d\mathbf{q}_1 \int_{-\infty}^{+\infty} h_1(\mathbf{q}_2) x_1(t + \mathbf{t} - \mathbf{q}_2) d\mathbf{q}_2 \right] + \\ & E \left[\int_{-\infty}^{+\infty} h_1(\mathbf{q}_1) x_1(t - \mathbf{q}_1) d\mathbf{q}_1 \int_{-\infty}^{+\infty} h_2(\mathbf{q}_2) x_2(t + \mathbf{t} - \mathbf{q}_2) d\mathbf{q}_2 \right] + \\ & E \left[\int_{-\infty}^{+\infty} h_2(\mathbf{q}_1) x_2(t - \mathbf{q}_1) d\mathbf{q}_1 \int_{-\infty}^{+\infty} h_1(\mathbf{q}_2) x_1(t + \mathbf{t} - \mathbf{q}_2) d\mathbf{q}_2 \right] + \\ & E \left[\int_{-\infty}^{+\infty} h_2(\mathbf{q}_1) x_2(t - \mathbf{q}_1) d\mathbf{q}_1 \int_{-\infty}^{+\infty} h_2(\mathbf{q}_2) x_2(t + \mathbf{t} - \mathbf{q}_2) d\mathbf{q}_2 \right] \end{aligned} \quad (4.29)$$

Poder-se-ia demonstrar que o valor esperado do produto dos integrais da equação (4.29) resultam na seguinte expressão para $R_x(\mathbf{t})$

$$\begin{aligned}
 R_y(\mathbf{t}) = & \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h_1(\mathbf{q}_1)h_1(\mathbf{q}_2) R_{x_1}(\mathbf{t} - \mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_1) d\mathbf{q}_1 d\mathbf{q}_2 + \\
 & \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h_1(\mathbf{q}_1)h_2(\mathbf{q}_2) R_{x_1x_2}(\mathbf{t} - \mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_1) d\mathbf{q}_1 d\mathbf{q}_2 + \\
 & \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h_2(\mathbf{q}_1)h_1(\mathbf{q}_2) R_{x_2x_1}(\mathbf{t} - \mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_1) d\mathbf{q}_1 d\mathbf{q}_2 + \\
 & \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h_2(\mathbf{q}_1)h_2(\mathbf{q}_2) R_{x_2}(\mathbf{t} - \mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_1) d\mathbf{q}_1 d\mathbf{q}_2
 \end{aligned} \tag{4.30}$$

Por outro lado, se esta relação for expressa no domínio da frequência, a expressão (4.30) pode ser muito simplificada, podendo demonstrar-se que resulta em

$$\begin{aligned}
 S_y(\mathbf{w}) = & H_1^*(\mathbf{w})H_1(\mathbf{w})S_{x_1}(\mathbf{w}) + H_1^*(\mathbf{w})H_2(\mathbf{w})S_{x_1x_2}(\mathbf{w}) + \\
 & H_2^*(\mathbf{w})H_1(\mathbf{w})S_{x_2x_1}(\mathbf{w}) + H_2^*(\mathbf{w})H_2(\mathbf{w})S_{x_2}(\mathbf{w})
 \end{aligned} \tag{4.31}$$

equação onde “*” significa “conjugado de”.

Esta equação pode ser rescrita para calcular a densidade espectral de uma resposta a N excitações (considerando $S_{x_i x_j} = S_{x_j}$)

$$S_y(\mathbf{w}) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N H_i^*(\mathbf{w})H_j(\mathbf{w}) S_{x_i x_j}(\mathbf{w}) \tag{4.32}$$

ou da resposta a uma excitação única

$$S_y(\mathbf{w}) = H^*(\mathbf{w})H(\mathbf{w}) S_x(\mathbf{w}) = |H(\mathbf{w})|^2 S_x(\mathbf{w}) \tag{4.33}$$

ou ainda a um conjunto N de excitações independentes (não correlacionadas)

$$S_y(\mathbf{w}) = \sum_{i=1}^N |H_i(\mathbf{w})|^2 S_{x_i}(\mathbf{w}) \tag{4.34}$$

Se se pretendesse, por exemplo, determinar o valor quadrático médio de um sinal resposta, tal poderia ser efectuado a partir de

$$E[y^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} S_y(\mathbf{w}) d\mathbf{w} \tag{4.35}$$

o que, no caso de uma excitação simples resulta em

$$E[y^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} |H(\mathbf{w})|^2 S_x(\mathbf{w}) d\mathbf{w} \quad (4.36)$$

ou para N excitações independentes (não correlacionadas)

$$E[y^2] = \sum_{i=1}^N \int_{-\infty}^{+\infty} |H_i(\mathbf{w})|^2 S_{x_i}(\mathbf{w}) d\mathbf{w} \quad (4.37)$$

É pois evidente que se torna muito mais simples analisar relações excitação-resposta no domínio da frequência do que no domínio do tempo. A tarefa de determinar as características de uma resposta (através da sua densidade espectral) reside portanto na determinação das características da densidade espectral da, ou das excitações, e na determinação das propriedades da função $H(\mathbf{w})$. É este último objectivo que se ilustrará de seguida.

Considere-se para o efeito o sistema de um grau de liberdade ilustrado na Figura 4.2. Suponha-se que esse sistema é actuado por uma excitação correspondente a uma força $F(t)$ com conteúdo espectral correspondente a um ruído branco. Nesse caso $S_x = S_0$ e portanto

$$S_y(\mathbf{w}) = |H(\mathbf{w})|^2 S_0 \quad (4.38)$$

Para determinar $H(\omega)$, considere-se que a excitação é da forma $x(t) = e^{i\omega t}$ e que a resposta é portanto $y(t) = H(\omega) e^{i\omega t}$.

A equação de equilíbrio dinâmico (4.1) pode assim ser reescrita

$$-m\mathbf{w}^2 H(\mathbf{w})e^{i\mathbf{w}t} + c i\mathbf{w} H(\mathbf{w})e^{i\mathbf{w}t} + k H(\mathbf{w})e^{i\mathbf{w}t} = e^{i\mathbf{w}t} \quad (4.39)$$

ou

$$H(\mathbf{w}) = \frac{1}{-m\mathbf{w}^2 + k + ic\mathbf{w}} \quad (4.40)$$

Pode então calcular-se a densidade espectral, tendo em conta que

$$S_y(\omega) = \frac{1}{-m\omega^2 + k + ic\omega} \frac{1}{-m\omega^2 + k - ic\omega} S_0$$

$$= \frac{S_0}{(k - m\omega^2)^2 + c^2\omega^2} \quad (4.41)$$

Uma vez calculada a densidade espectral, pode, por exemplo, calcular-se o valor médio quadrático, o qual é está relacionado com a variância do processo e é igual a

$$E[y^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{1}{-m\omega^2 + ic\omega + k} \right|^2 S_0 d\omega \quad (4.42)$$

e pode ser calculado, recorrendo a uma tabela de integrais (ver anexo), resultando

$$E[y^2] = \frac{pS_0}{kc} \quad (4.43)$$

A densidade espectral constante da equação (4.41) é apresentada na Figura 4.3, para valores genéricos de m , k e c .

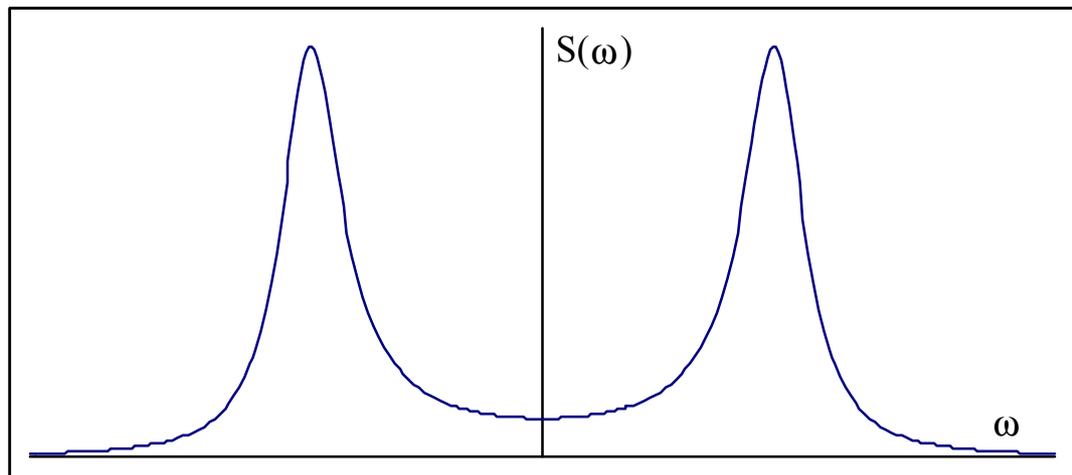


Fig. 4.3 – Densidade espectral da resposta de um sistema a uma excitação ruído branco

Como pode observar-se, a função é simétrica, pelo que se poderia analisar apenas os valores correspondentes ao eixo positivo de “ w ”. Apresenta máximos para valores de “ w ” que correspondem à frequência própria do sistema estrutural. Da equação (4.43) pode também verificar-se que o valor quadrático médio da resposta é proporcional ao valor da densidade espectral da excitação (S_0) e inversamente proporcional à rigidez e ao amortecimento do sistema.

No entanto, o valor máximo, que se verifica para valores de “ p ” aproximadamente iguais a

$$p \approx \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (4.44)$$

é igual a

$$S_y(\mathbf{w})_{\max} = \frac{S_0}{c^2 \mathbf{w}^2} = \frac{S_0 m}{c^2 k} \quad (4.45)$$

O processo que se acaba de analisar corresponde à “filtragem” de um ruído branco através de um sistema de um grau de liberdade com frequência “ p ”.

Como pode verificar-se, o gráfico da densidade espectral apresentado na Figura 4.3 aproxima-se de um gráfico típico de um processo de banda estreita, já que a maior parte da “energia” do sinal se centra em torno dos valores de “ p ” e portanto numa zona limitada do espectro. É pois quase irrelevante se a excitação é um ruído branco ou um processo de banda larga, já que o sistema apenas selecciona (ou amplifica) as componentes da excitação com frequências próximas da sua frequência própria. Tal é o fenómeno da ressonância dinâmica já conhecido da dinâmica clássica.

A densidade espectral do processo resposta correspondente ao caso analisado, tem pois a forma da função $|H(\mathbf{w})|^2$, já que a densidade espectral da resposta não é mais do que a função $|H(\mathbf{w})|^2$ multiplicada por uma constante. Assim a forma da função $|H(\mathbf{w})|^2$, apresentada na Figura 4.4, é exactamente a representada na figura 4.3.

Tal sucede sempre que se analisa uma excitação que tenha características de processo de banda larga. Por outro lado, se uma excitação

tem características de processo de banda estreita, a resposta será também tendencialmente um processo de banda estreita que reflectirá as características da acção e eventualmente do sistema.

Os parâmetros que podem influenciar a forma da função $|H(\omega)|^2$ são os parâmetros estruturais m , k e c . A relação entre m e k define o valor de ω para o qual a função apresenta o valor máximo, ou seja, no caso de sistema de um grau de liberdade, o valor da frequência própria do sistema. O valor de c , define a forma da função, ao influenciar a “abertura” da curva que a representa. Reduzidos valores de “ c ” fazem com que a função assumia valores elevados apenas na vizinhança próxima da frequência própria, ao passo que, para maiores valores de “ c ”, ou seja para sistemas mais amortecidos, a função não apresenta picos tão pronunciados. A influência do amortecimento na forma da função $|H(\omega)|^2$ pode observar-se na Figura 4.4, onde o atrás descrito é facilmente visível.

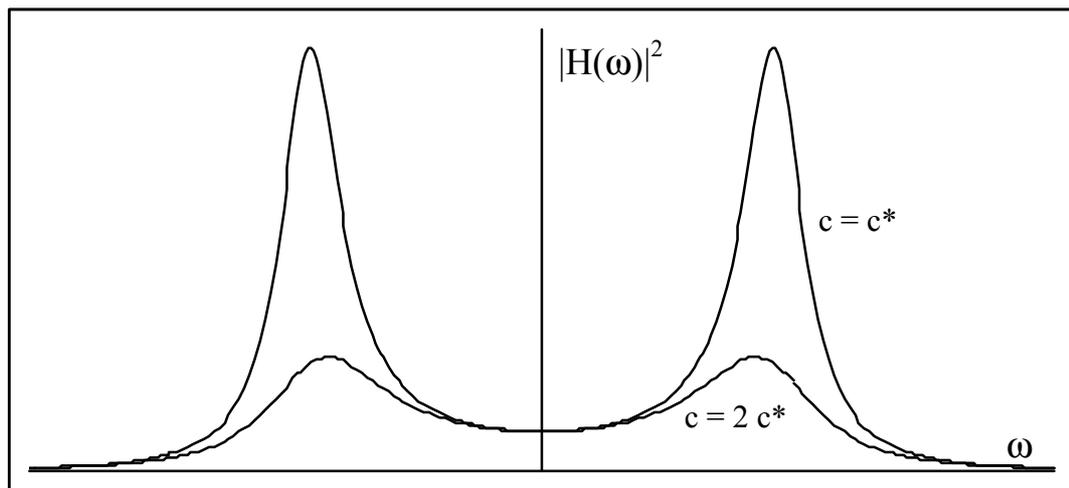


Fig. 4.4 – $|H(\omega)|^2$ de um sistema em função do amortecimento

Observando a Figura 4.4 pode também verificar-se que a resposta a uma excitação com características de ruído branco ou de banda larga difere consoante as características do sistema. Assim a resposta de um sistema amortecido será certamente um processo de banda estreita (tal como a correspondente função $|H(\omega)|^2$), e a resposta de um sistema muito amortecido será certamente um processo de banda larga, também de acordo com a forma da função $|H(\omega)|^2$.

4.5.4 - Exemplo de aplicação

Considere-se o exemplo de um sistema de um grau de liberdade representado na Figura 4.5. O sistema é um sistema sem massa, com comportamento visco-elástico e é actuado por uma excitação $F(t)$.

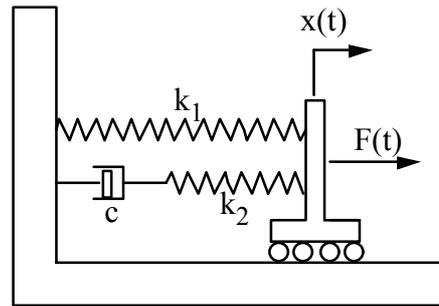


Fig. 4.5 – Sistema de um grau de liberdade, sem massa, com comportamento visco-elástico

A determinação da função de transferência do sistema pode ser efectuada da seguinte forma:

Em primeiro lugar, importa determinar a equação de equilíbrio dinâmico, a qual neste caso pode ser escrita como

$$f(t) = k_1 x + \frac{1}{\frac{1}{k_2 x} + \frac{1}{c \dot{x}}} = k_1 x + \frac{ck_2 x \dot{x}}{k_2 x + c \dot{x}} \quad (4.46)$$

Fazendo $f(t) = f_0 e^{i\omega t}$ e $x = f_0 e^{i\omega t} H(\omega)$, e substituindo esses valores na equação (4.46) resulta

$$f_0 e^{i\omega t} = k_1 f_0 e^{i\omega t} H(\omega) + \frac{ck_2 f_0 e^{i\omega t} H(\omega) f_0 i\omega e^{i\omega t} H(\omega)}{k_2 f_0 e^{i\omega t} H(\omega) + c f_0 i\omega e^{i\omega t} H(\omega)} \quad (4.47)$$

Cancelando, na equação anterior os termos em $f_0 e^{i\omega t}$ obtém-se

$$1 = k_1 H(\omega) + \frac{ck_2 H(\omega) i\omega H(\omega)}{k_2 H(\omega) + c i\omega H(\omega)} = H(\omega) \left(k_1 + \frac{ck_2 i\omega}{k_2 + c i\omega} \right) \quad (4.48)$$

pelo que

$$H(\mathbf{w}) = \frac{k_2 + ci\mathbf{w}}{k_1k_2 + ci\mathbf{w}(k_1 + k_2)} \quad (4.49)$$

Imagine-se agora que a força $F(t)$ corresponde a um processo estacionário com densidade espectral dada pela seguinte equação

$$S_F(\mathbf{w}) = \frac{S_0}{\left(1 + \frac{\mathbf{w}^2}{\mathbf{w}_0^2}\right)} \quad (4.50)$$

e que se pretende determinar o valor quadrático médio da resposta $x(t)$.

Para tal, precisa determinar-se a densidade espectral da resposta, da forma que se segue

$$S_x(\mathbf{w}) = S_F(\mathbf{w}) |H(\mathbf{w})|^2 = \frac{S_0}{\left(1 + \frac{\mathbf{w}^2}{\mathbf{w}_0^2}\right)} \left| \frac{k_2 + ci\mathbf{w}}{k_1k_2 + ci\mathbf{w}(k_1 + k_2)} \right|^2 = \quad (4.51)$$

$$S_0 \mathbf{w}_0^2 \left| \frac{1}{\mathbf{w}_0 + i\mathbf{w}} \right|^2 \left| \frac{k_2 + ci\mathbf{w}}{k_1k_2 + ci\mathbf{w}(k_1 + k_2)} \right|^2 =$$

$$S_0 \mathbf{w}_0^2 \left| \frac{k_2 + ci\mathbf{w}}{\mathbf{w}_0k_1k_2 - \mathbf{w}^2c(k_1 + k_2) + i\mathbf{w}[k_1k_2 + c\mathbf{w}_0(k_1 + k_2)]} \right|^2$$

e a partir desse valor calcular

$$E[x^2] = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\mathbf{w})d\mathbf{w} = \quad (4.52)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} S_0 \mathbf{w}_0^2 \left| \frac{k_2 + ci\mathbf{w}}{\mathbf{w}_0k_1k_2 - \mathbf{w}^2c(k_1 + k_2) + i\mathbf{w}[k_1k_2 + c\mathbf{w}_0(k_1 + k_2)]} \right|^2 d\mathbf{w}$$

o que recorrendo à tabela de integrais disponível em anexo, resulta em

$$E[x^2] = S_0 \mathbf{w}_0^2 P \left\{ \frac{\mathbf{w}_0k_1c + (k_1 + k_2)k_2}{k_1(k_1 + k_2)[k_1k_2 + c\mathbf{w}_0(k_1 + k_2)]} \right\} \quad (4.53)$$

5. Estatística de processos de banda estreita

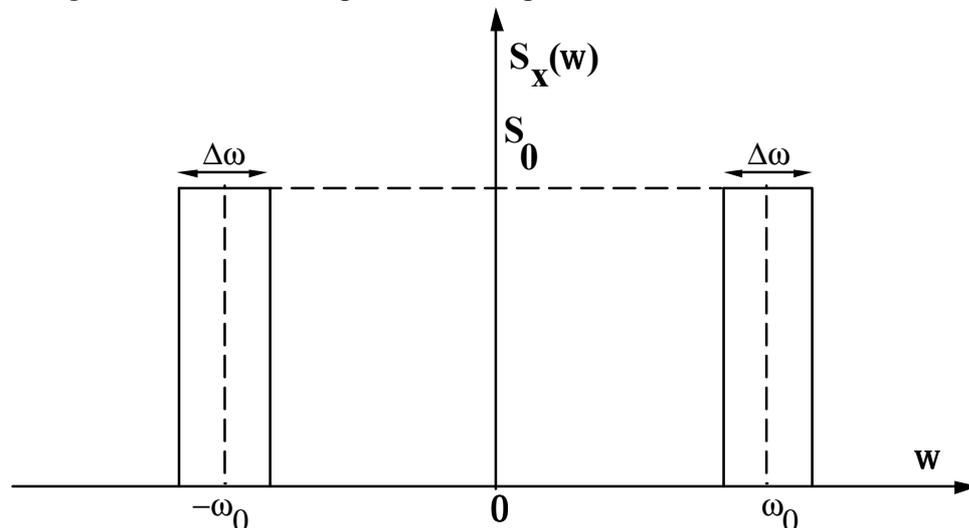
5.1 Introdução

Entre os processos estocásticos, os processos de banda estreita têm especial interesse, já que representam grande parte dos processos que resultam da resposta estrutural a qualquer tipo de excitação. Com efeito, qualquer que sejam as características de uma excitação, seja ela de banda larga ou estreita, a sua filtragem através de um sistema linear, resulta na maior parte das vezes num processo de banda estreita. Para tal basta que o sistema não seja altamente amortecido.

Por outro lado, mesmo sistemas muito amortecidos, quando actuados por excitações de banda estreita, originam respostas de banda estreita.

Considere-se então um processo de banda estreita caracterizado por uma densidade espectral com valor igual a S_0 para frequências num intervalo Dw centrado em w_0 e valor igual a zero em toda a restante zona do espectro, tal como ilustrado na Figura 5.1.

Fig. 5.1 – Densidade espectral de um processo de banda estreita.



Nesse caso poderia mostrar-se que a função de autocorrelação pode ser obtida pela seguinte expressão

$$R_y(t) = 4S_0 \frac{\text{sen}\left(\Delta\omega \frac{t}{2}\right)}{t} \cos\omega_0 t \quad (5.1)$$

Assuma-se agora que o processo é Gaussiano e que portanto são conhecidas a função densidade de probabilidade relativa ao parâmetro em questão (suponha-se que um deslocamento) e ainda dos processos derivados (neste caso a correspondente velocidade) e ainda a função densidade de probabilidade conjunta.

São portanto conhecidos, a média dos deslocamentos, o desvio padrão do deslocamento, os correspondentes valores de velocidades e o coeficiente de correlação entre deslocamentos e velocidades.

A média do processo é nula dado que

$$R_y(t \rightarrow \infty) = m_y = 0 \quad (5.2)$$

Relembrando que

$$S_y(\omega) = \omega^2 S_{\dot{y}}(\omega) \quad (5.3)$$

pode-se concluir que a média das velocidades será também nula.

Por outro lado

$$\mathbf{s}_y^2 = E[y^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} S_y(\omega) d\omega \approx 2S_0 \Delta\omega \quad (5.4)$$

$$\mathbf{s}_{\dot{y}}^2 = E[\dot{y}^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^2 S_y(\omega) d\omega \approx 2S_0 \omega_0^2 \Delta\omega \quad (5.5)$$

Pode ainda mostrar-se que

$$\begin{aligned} E[y\dot{y}] &= \frac{d}{dt} [R_y(t)] \text{ para } t = 0 \\ &= i \int_{-\infty}^{+\infty} \omega S_y(\omega) d\omega = 0 \end{aligned} \quad (5.6)$$

pelo que

$$\mathbf{r}_{y\dot{y}} = \frac{E[y\dot{y}]}{\mathbf{s}_y \mathbf{s}_{\dot{y}}} = 0 \quad (5.7)$$

não existindo portanto correlação entre y e a sua derivada e sendo

$$p_{y\dot{y}}(y\dot{y}) = p_y(y) p_{\dot{y}}(\dot{y}) \quad (5.8)$$

Assim sendo, e relembrando a equação (1.16), as distribuições dos deslocamentos e velocidades podem ser escritas como

$$p_y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\mathbf{p}} \mathbf{s}_y} e^{-\frac{(y)^2}{2\mathbf{s}_y^2}} \quad (5.9)$$

$$p_{\dot{y}}(\dot{y}) = \frac{1}{\sqrt{2\mathbf{p}} \mathbf{s}_{\dot{y}}} e^{-\frac{(\dot{y})^2}{2\mathbf{s}_{\dot{y}}^2}} \quad (5.10)$$

5.2 Caracterização de processos

Imagine-se uma realização de um processo de banda estreita, com densidade espectral semelhante à indicada na Figura 5.1 e com expressão no domínio do tempo tal como representada na Figura 5.2.

Para caracterizar o processo, pode tentar-se responder a algumas perguntas:

- Quantas vezes, durante um certo período T , se ultrapassa um dado nível pré-definido “ $y=a$ ”?
- Durante quanto tempo, nesse período T , se ultrapassa o mesmo nível?
- Qual a distribuição estatística dos valores máximos ou “valores de pico”?
- Qual a frequência com que esses “valores de pico” ocorrem?

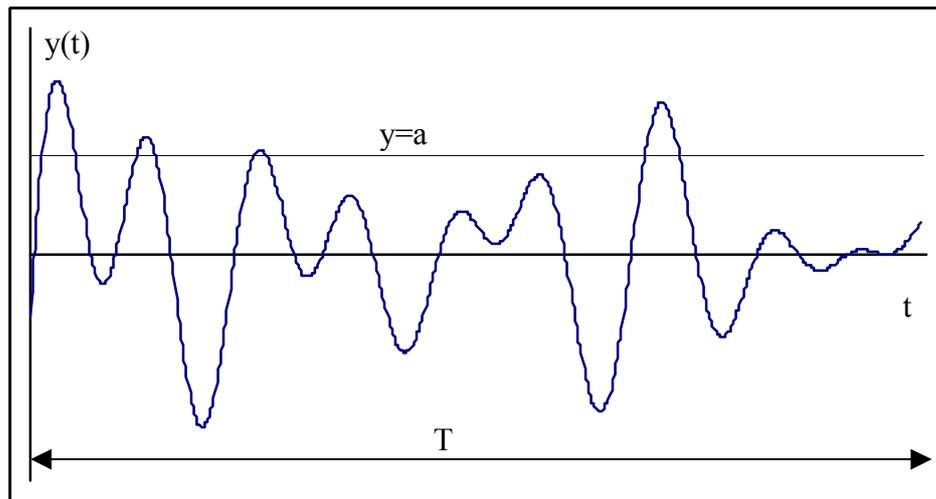


Fig. 5.2 – Realização de um processo de banda estreita

De um ponto de vista visual, seria fácil responder às questões acima colocadas. Como pode verificar-se, para a função representada na Figura 5.2, o nível “ a ” foi ultrapassado por quatro vezes, sendo também fácil quantificar o tempo durante o qual a função se situou acima desse nível. Ainda fácil é por exemplo verificar que ocorreram 9 máximos positivos e 9 negativos, pelo que a frequência de máximos seria de $18/T$. Já não seria possível de uma forma simples responder à última questão, ou seja qual a função densidade de distribuição dos valores máximos.

É portanto necessário encontrar uma forma de responder de uma forma sistemática a essas questões, já que são questões de ordem prática que se podem colocar se se pretender por exemplo verificar a fiabilidade de uma resposta estrutural, avaliando por exemplo a probabilidade de se ultrapassar um determinado nível representativo do colapso, ou por exemplo num processo que possa envolver colapso por fadiga, avaliar quantos máximos se verificam durante um dado período e qual a sua amplitude.

5.2.1 Passagem ascendente de um dado nível

Qual é então o número de vezes que é ultrapassado um dado nível “ a ” num processo de banda estreita?

Denomine-se por $n_a^+(T)$, o número passagens ascendentes do nível “ a ” durante um período T , numa dada realização do processo. Nesse caso, a média para todo o processo, $N_a^+(T)$, é dada por

$$N_a^+(T) = E[n_a^+(T)] \quad (5.11)$$

Caso o processo seja estacionário, essa média é proporcional a T e pode definir-se a frequência com que se verificam passagens ascendentes de “ a ”, ν_a^+ , como

$$\nu_a^+ = \frac{N_a^+(T)}{T} \quad (5.12)$$

que é também a frequência com que a função cruza o nível “ a ” com derivada positiva.

Considere-se então um pequeno intervalo de tempo “ dt ”, durante o qual se verifica uma passagem ascendente de “ a ”.

Se “ dt ” for suficientemente pequeno, haverá uma passagem ascendente do nível “ a ” se, no início do intervalo,

$$y < a \quad e \quad \frac{dy}{dt} > \frac{a-y}{dt}$$

A probabilidade de tal acontecer pode ser determinada através da função distribuição conjunta de y e da sua derivada, da seguinte forma

$$P[\text{cruzar } y = a \text{ com derivada positiva durante } dt] = \nu_a^+ dt = \int_0^\infty \left(\int_y^a p_{y\dot{y}}(y, \dot{y}) dy \right) d\dot{y} \quad (5.13)$$

Para que se verifique uma passagem ascendente do nível “ a ”, terá que se verificar a seguinte condição

$$\dot{y} \geq \frac{a-y}{dt} \Rightarrow y \geq a - \dot{y} dt \quad (5.14)$$

pelo que, o limite inferior do integral em dy na equação (5.13), “ y ”, pode ser substituído pelo correspondente valor, resultando

$$v_a^+ = \frac{1}{dt} \int_0^{\infty} \left(\int_{a-\dot{y}dt}^a p_{y\dot{y}}(y, \dot{y}) dy \right) d\dot{y} = \frac{1}{dt} \int_0^{\infty} \left(p_{y\dot{y}}(a, \dot{y}) \frac{dy}{dt} dt \right) d\dot{y} = \int_0^{\infty} (p_{y\dot{y}}(a, \dot{y}) \dot{y}) d\dot{y} \quad (5.15)$$

que é o valor da frequência de passagens ascendentes do nível “ a ”, qualquer que seja a função densidade probabilidade conjunta de y e da sua derivada.

Supondo que o processo é Gaussiano, e que não existe correlação entre y e a sua derivada

$$\begin{aligned} v_a^+ &= \int_0^{\infty} (p_{y\dot{y}}(a, \dot{y}) \dot{y}) d\dot{y} = p_y(a) \int_0^{\infty} (p_{\dot{y}}(\dot{y}) \dot{y}) d\dot{y} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi} s_y} e^{-\frac{a^2}{2s_y^2}} \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi} s_{\dot{y}}} e^{-\frac{\dot{y}^2}{2s_{\dot{y}}^2}} \dot{y} \right) d\dot{y} \end{aligned} \quad (5.16)$$

que, resolvendo o integral, conduziria ao resultado final

$$v_a^+ = \frac{1}{2\pi} \frac{s_{\dot{y}}}{s_y} e^{-\frac{a^2}{2s_y^2}} \quad (5.17)$$

Um caso particular da expressão anterior ($a=0$) conduz ao valor da frequência de passagens ascendentes do nível “ 0 ”, ou seja uma indicação aproximada da frequência do processo. Nesse caso, esse valor aproximado é obtido através da expressão

$$v_0^+ = \frac{1}{2\pi} \frac{s_{\dot{y}}}{s_y} \quad (5.18)$$

Como exemplo de aplicação, analise-se a frequência com que a resposta de um sistema de um grau de liberdade ultrapassa um dado nível “ a ”, quando sujeito a uma excitação de características Gaussianas, tipo ruído branco com densidade espectral S_θ .

Nesse caso, como se demonstrou para y (equação 4.43) e se poderia demonstrar para a sua derivada

$$\mathbf{s}_y^2 = \frac{\mathbf{p}S_0}{kc} \quad e \quad \mathbf{s}_{\dot{y}}^2 = \frac{\mathbf{p}S_0}{mc}$$

pelo que

$$v_a^+ = \frac{1}{2\mathbf{p}} \sqrt{\frac{k}{m}} e^{\left(\frac{a^2}{\frac{2\mathbf{p}S_0}{kc}} \right)} \quad (5.19)$$

$$v_0^+ = \frac{1}{2\mathbf{p}} \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{\mathbf{w}_0}{2\mathbf{p}} \quad (\mathbf{w}_0 \text{ em rad./seg. e } v_0^+ \text{ em Hz.}) \quad (5.20)$$

sendo \mathbf{w}_0 a frequência angular e resultando portanto que v_0^+ é a frequência circular.

A equação (5.18) pode ser rescrita tendo em conta que

$$\mathbf{s}_y^2 = R_y(0) \quad e \quad \mathbf{s}_{\dot{y}}^2 = -\ddot{R}_y(0)$$

pelo que

$$(v_0^+)^2 = -\left(\frac{1}{2\mathbf{p}} \right)^2 \frac{\ddot{R}_y(0)}{R_y(0)} \quad (5.21)$$

e, atendendo à relação entre v_0^+ e \mathbf{w}_0 e à relação entre $R_y(\mathbf{t})$ e $S_y(\mathbf{w})$

$$\mathbf{w}_0^2 = -\frac{\ddot{R}_y(0)}{R_y(0)} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} S_y(\mathbf{w}) \mathbf{w}^2 d\mathbf{w}}{\int_{-\infty}^{\infty} S_y(\mathbf{w}) d\mathbf{w}} \quad (5.22)$$

5.2.2 Distribuição dos máximos (valores de pico)

O conhecimento da estatística dos valores máximos ou de pico é extremamente importante, já que, a maior parte das vezes, são os valores máximos de um processo que caracterizam esse mesmo processo ou condicionam a sua segurança.

Conhecidas as frequências de passagem do nível “ a ” e a frequência de passagem do nível “ 0 ”, torna-se possível determinar a função densidade de probabilidade dos valores máximos ou de pico.

Com efeito, dado estar-se perante um processo de banda estreita e portanto a cada ciclo corresponder um valor máximo, pode afirmar-se que durante um certo intervalo “ T ”, ocorrerão aproximadamente “ $v_0^+ T$ ” valores máximos positivos e “ $v_a^+ T$ ” valores máximos superiores a “ a ”.

Assim sendo, a percentagem de ciclos que excedem “ a ” pode calcular-se através de

$$1 - \int_0^a p_p(a) da = \int_a^\infty p_p(a) da = \frac{v_a^+}{v_0^+} \quad (5.23)$$

de onde resulta que

$$p_p(a) = -\frac{1}{v_0^+} \frac{d}{da} (v_a^+) \quad (5.24)$$

expressão geral que permite calcular a função densidade de probabilidade dos valores máximos ou de pico.

No caso de o processo ser Gaussiano, e tendo em conta as equações (5.19 e 5.20), pode afirmar-se que essa função é dada pela seguinte expressão

$$p_p(a) = -\frac{d}{da} \left(e^{-\frac{a^2}{2s_y^2}} \right) = \frac{a}{s_y^2} e^{-\frac{a^2}{2s_y^2}} \quad \text{para } 0 \leq a \leq \infty \quad (5.25)$$

que é conhecida como distribuição de Rayleigh e se representa na Figura 5.3.

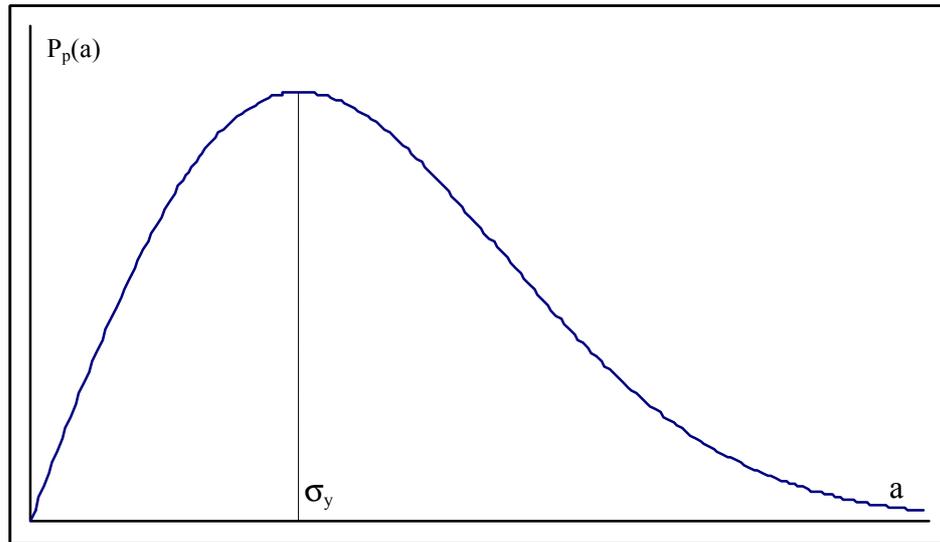


Fig. 5.3 – Função densidade de distribuição de Rayleigh

Como pode observar-se na Figura 5.3, a função tem o seu maior valor para $a = \sigma_y$, o que significa que a maioria dos valores de pico terão valores próximos do desvio padrão do processo. Existirão assim poucos valores de pico de reduzido valor ($\gg 0$) e de elevado valor ($\gg \sigma_y$).

Para obter a probabilidade de um valor de pico exceder um dado valor “ a ”, basta integrar a expressão da equação (5.25) ou utilizar a expressão da equação (5.23) obtendo-se

$$1 - P_p(a) = \int_a^{\infty} \frac{a}{\sigma_y^2} e^{-\frac{a^2}{2\sigma_y^2}} da = e^{-\frac{a^2}{2\sigma_y^2}} \quad (5.26)$$

5.2.3 Frequência de máximos

Outro aspecto importante da análise de qualquer processo é a determinação da frequência com que ocorrem valores máximos.

Se o processo for um processo Gaussiano de banda estreita, sabe-se que a função densidade de probabilidade dos valores de pico é dada pela equação (5.25). Para tal assumiu-se que a cada ciclo corresponde um valor máximo, pelo que se pode esperar que a frequência de máximos corresponda à frequência do sistema em ciclos por unidade de tempo. Verifique-se até que ponto tal assunção é válida.

Se um dado valor de “ y ” é um valor máximo ou de pico, então, terá de se verificar “ $dy/dt=0$ ” e “ $d^2y/dt^2<0$ ”. Consequentemente, a frequência de máximos será a frequência com que a derivada de “ y ”, “ dy/dt ”, tem ela própria passagens descendentes do valor “ 0 ”, ou seja com derivada negativa. Dado que para cada passagem descendente de “ 0 ” existe uma passagem ascendente, a frequência de máximos pode ser calculada como a frequência com que “ dy/dt ”, cruza o valor “ 0 ”, com derivada positiva. Esse valor pode ser calculado, por semelhança com a expressão (5.18), através de

$$v_{y=0}^+ = \frac{1}{2p} \frac{s_{\dot{y}}}{s_y} \quad (5.27)$$

que é a expressão geral para a frequência de máximos.

Para um processo de banda estreita, tal como o ilustrado na Figura 3.1, e fazendo “ $D\mathbf{w} = \mathbf{w}_2 - \mathbf{w}_1$ ” e “ $\mathbf{w}_0 = (\mathbf{w}_2 + \mathbf{w}_1)/2$ ”, pode mostrar-se que a frequência de máximos é obtida através de

$$v_{y=0}^+ = \frac{1}{2p} \frac{s_{\dot{y}}}{s_y} = \frac{1}{2p} \frac{\sqrt{E[\dot{y}^2]}}{\sqrt{E[y^2]}} = \frac{1}{2p} \frac{\sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{w}^4 S_y(\mathbf{w}) d\mathbf{w}}}{\sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{w}^2 S_y(\mathbf{w}) d\mathbf{w}}} \approx \frac{1}{2p} \sqrt{\frac{2S_0 \mathbf{w}_0^4 \Delta \mathbf{w}}{2S_0 \mathbf{w}_0^2 \Delta \mathbf{w}}} = \frac{\mathbf{w}_0}{2p} \quad (5.28)$$

que é um valor igual ao da frequência de ciclos, tal como se obteve na equação (5.20).

Caso o processo não seja de banda estreita, pode mostrar-se que

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_y^2 &= E[y^2] = \int_{-\infty}^{\infty} S_y(\mathbf{w}) d\mathbf{w} = 2S_0(\mathbf{w}_2 - \mathbf{w}_1) \\ \mathbf{s}_{\dot{y}}^2 &= E[\dot{y}^2] = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{w}^2 S_y(\mathbf{w}) d\mathbf{w} = \frac{2}{3} S_0(\mathbf{w}_2^3 - \mathbf{w}_1^3) \\ \mathbf{s}_{\ddot{y}}^2 &= E[\ddot{y}^2] = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{w}^4 S_y(\mathbf{w}) d\mathbf{w} = \frac{2}{5} S_0(\mathbf{w}_2^5 - \mathbf{w}_1^5) \end{aligned}$$

e portanto a frequência de máximos

$$v_{\dot{y}=0}^+ = \frac{1}{2\mathbf{p}} \sqrt{\frac{3(\mathbf{w}_2^5 - \mathbf{w}_1^5)}{5(\mathbf{w}_2^3 - \mathbf{w}_1^3)}} \quad (5.29)$$

é diferente da frequência de passagens ascendentes do nível “0”

$$v_{y=0}^+ = \frac{1}{2\mathbf{p}} \sqrt{\frac{(\mathbf{w}_2^3 - \mathbf{w}_1^3)}{3(\mathbf{w}_2 - \mathbf{w}_1)}} \quad (5.30)$$

Tal diferença deve-se ao facto de não existir necessariamente apenas um máximo por cada passagem ascendente do nível “0”, tal como pode verificar-se observando a Figura 5.2, onde são visíveis dois picos positivos sem que se tenha cruzado o eixo das abcissas.

Como exemplo, suponha-se um processo de banda larga em que a frequência inferior seja igual a 10Hz ($\mathbf{w}_1 = 2\mathbf{p} \times 10$) e a superior igual a 20Hz ($\mathbf{w}_2 = 2\mathbf{p} \times 10$). Nesse caso, a frequência central ou aparente do processo seria 15 Hz, enquanto a frequência de passagens ascendentes do nível “0” seria 15,3 Hz e a frequência de máximos 16,3 Hz.

5.2.4 Valor esperado do máximo

O valor esperado do máximo valor observado num dado intervalo “ Dt ”, “ M ”, pode ser obtido assumindo que tal é o valor de “ a ”, para o qual, em média, se verifica durante esses intervalos apenas uma passagem ascendente.

Nesse caso, usando a equação (5.17)

$$\frac{1}{\Delta t} = \frac{1}{2p} \frac{s_y}{s_y} e^{\frac{M^2}{2s_y^2}} \Rightarrow \ln \frac{\Delta t s_y}{2ps_y} = \frac{M^2}{2s_y^2} \quad (5.31)$$

de onde resulta

$$M = \sqrt{2s_y^2 \ln \frac{\Delta t s_y}{2ps_y}} = \sqrt{2s_y^2 \ln(\Delta t v_0^+)} \quad (5.32)$$

5.2.5 Outras características de processos

Considere-se

$$I_k = \int_{-\infty}^{\infty} w^k S_y(w) dw \quad (5.33)$$

que se denominará por momento espectral de ordem “ k ” do processo e em que, por exemplo, o momento espectral de ordem 0 “ I_0 ” é o valor quadrático médio, ou, para processos de média nula, a variância de y .

Poderia demonstrar-se, tendo em conta o descrito em 3.2, que o momento espectral de ordem “ $k+2n$ ” é o momento espectral de ordem “ k ” da $n^{\text{ésima}}$ derivada do processo, pelo que, por exemplo, o momento espectral de ordem 2 “ I_2 ” é o valor quadrático médio (ou variância para processos de média nula) da derivada de y .

Assim sendo pode usar-se essa notação para definir outras características de processos, tais como a largura de banda, envolvente e duração de uma excursão acima de um dado nível.

Assim, a largura de banda de um processo, que caracteriza a dispersão da função densidade espectral em torno da sua frequência central, é definida como

$$L_b = \sqrt{1 - \frac{I_1^2}{I_0 I_2}} \quad (5.34)$$

podendo demonstrar-se que assume valores entre 0 e 1. A título indicativo, pode considerar-se que para processos de banda estreita $0,1 \leq L_b \leq 0,25$ e para processos de banda larga $0,5 \leq L_b \leq 1,0$.

Considere-se por envolvente de um processo, o conjunto de duas curvas simétricas, cujos valores são, em valor absoluto, sempre superiores ou iguais aos valores da função que traduz o processo.

Poderia demonstrar-se que o desvio padrão da envolvente “ s_{env} ” pode ser obtido multiplicando o desvio padrão da derivada do processo pelo valor da largura de banda.

$$s_{env} = s_y L_b \quad (5.35)$$

No que respeita à duração de uma excursão acima de um dado nível “ a ”, o seu valor esperado pode ser obtido através de

$$E[T_a] = \frac{1}{v_0^+ \frac{a}{s_y}} \left(1 - \frac{s_y^2}{a^2} + \frac{s_y^4}{a^4} - \frac{s_y^6}{a^6} + \dots \right) \quad (5.36)$$

e o valor esperado da duração de uma excursão da envolvente acima desse mesmo nível através de

$$E[T_a^{env}] = \frac{\sqrt{\frac{s_y}{2p}}}{v_0^+ a L_b} \quad (5.37)$$

Bibliografia

Newland D. E.; 1993; *An Introduction to Random Vibration and Spectral and Wavelet Analysis*; 3ª Edição, Longman, Nova York.

Sólnes, J., 1997; *Stochastic Processes and Random Vibrations*; John Wiley & Sons, Chichester.

Clough, R. e Penzien, J., 1993; *Dynamics of Structures*; 2ª Edição, McGraw-Hill, Nova York.

Duarte, R. T.; 1987; “Dinâmica de Estruturas”, Apontamentos da Disciplina de Mestrado em Engenharia de Estruturas do IST - Dinâmica de Estruturas; IST, Lisboa.

Pereira, J.; 1974; “Métodos Probabilísticos em Engenharia Sísmica”, Memória N° 442; LNEC, Lisboa.

Azevedo, J. e Proença J.; 1990; “Dinâmica de Estruturas”, Disciplina da Licenciatura em Eng^a Civil do IST - Dinâmica de Estruturas e Engenharia Sísmica; IST, Lisboa.

Anexo I – Tabelas de integrais para cálculo de valor quadrático médio

A seguinte tabela, permite calcular o valor de integrais da forma

$$I_n = \int_{-\infty}^{\infty} |H_n(\mathbf{w})|^2 d\mathbf{w}$$

em que

$$H_n(\mathbf{w}) = \frac{B_0 + (i\mathbf{w}) B_1 + (i\mathbf{w})^2 B_2 + \dots + (i\mathbf{w})^{n-1} B_{n-1}}{A_0 + (i\mathbf{w}) A_1 + (i\mathbf{w})^2 A_2 + \dots + (i\mathbf{w})^n A_n}$$

Tabela A-1 – Tabela de integrais

| | |
|--|-----|
| $H_1(\mathbf{w}) = \frac{B_0}{A_0 + (i\mathbf{w}) A_1} \Rightarrow I_1 = \frac{\mathbf{p}B_0}{A_0 A_1}$ | n=1 |
| $H_2(\mathbf{w}) = \frac{B_0 + i\mathbf{w} B_1}{A_0 + i\mathbf{w} A_1 - \mathbf{w}^2 A_2} \Rightarrow I_2 = \frac{\mathbf{p}\{A_0 B_1^2 + A_2 B_0^2\}}{A_0 A_1 A_2}$ | n=2 |
| $H_3(\mathbf{w}) = \frac{B_0 + i\mathbf{w} B_1 - \mathbf{w}^2 B_2}{A_0 + i\mathbf{w} A_1 - \mathbf{w}^2 A_2 - i\mathbf{w}^3 A_3}$ $\Rightarrow I_3 = \frac{\mathbf{p}\{A_0 A_3 (2B_0 B_2 - B_1^2) - A_0 A_1 B_2^2 - A_2 A_3 B_0^2\}}{A_0 A_3 (A_0 A_3 - A_1 A_2)}$ | n=3 |
| $H_4(\mathbf{w}) = \frac{B_0 + i\mathbf{w} B_1 - \mathbf{w}^2 B_2 - i\mathbf{w}^3 B_3}{A_0 + i\mathbf{w} A_1 - \mathbf{w}^2 A_2 - i\mathbf{w}^3 A_3 + \mathbf{w}^4 A_4}$ $\Rightarrow I_4 = \frac{\mathbf{p}\{A_0 B_3^2 (A_0 A_3 - A_1 A_2) + A_0 A_1 A_4 (2B_1 B_3 - B_2^2) - A_0 A_3 A_4 (B_1^2 - 2B_0 B_2) + A_4 B_0^2 (A_1 A_4 - A_2 A_3)\}}{A_0 A_4 (A_0 A_3^2 + A_1^2 A_4 - A_1 A_2 A_3)}$ | n=4 |
| $H_5(\mathbf{w}) = \frac{B_0 + i\mathbf{w} B_1 - \mathbf{w}^2 B_2 - i\mathbf{w}^3 B_3 + \mathbf{w}^4 B_4}{A_0 + i\mathbf{w} A_1 - \mathbf{w}^2 A_2 - i\mathbf{w}^3 A_3 + \mathbf{w}^4 A_4 + i\mathbf{w}^5 A_5}$ $\Rightarrow I_5 = \frac{\mathbf{p}\{A_0 B_4^2 (A_0 A_3^2 + A_1^2 A_4 - A_0 A_1 A_5 - A_1 A_2 A_3) + A_0 A_5 (2B_2 B_4 - B_3^2) (A_1 A_2 - A_0 A_4) + A_0 A_5 (2B_0 B_4 - 2B_1 B_3 + B_2^2) (A_0 A_5 - A_1 A_4) + A_0 A_5 (2B_0 B_4 - B_1^2) (A_3 A_4 - A_2 A_5) + A_5 B_0^2 (A_1 A_4^2 + A_2^2 A_5 - A_0 A_4 A_5 - A_2 A_3 A_4)\}}{A_0 A_5 (A_0^2 A_5^2 - 2A_0 A_1 A_4 A_5 - A_0 A_2 A_3 A_5 + A_1 A_2^2 A_5 + A_1^2 A_4^2 + A_0 A_3^2 A_4 + A_1 A_2 A_3)}$ | n=5 |

