

IDENTIFICAÇÃO DINÂMICA DE SISTEMAS ESTRUTURAIS

Conceitos gerais

Mestrado em Engenharia de Estruturas - IST

Disciplina de Dinâmica de Estruturas

Jorge Miguel S. F. M. Proença

João J. R. T. de Azevedo

IST - 1999

ÍNDICE

SUMÁRIO	1
1 - INTRODUÇÃO	2
2 - FORMULAÇÃO ANALÍTICA SUBJACENTE À IDENTIFICAÇÃO DINÂMICA DE SISTEMAS ESTRUTURAIS	4
2.1 - Fundamentos de Dinâmica estrutural	4
2.2 - Propriedades da Função de Receptância	10
3 - TÉCNICAS DE MEDIÇÃO EXPERIMENTAL DAS FRFs	14
3.1 - Sistema de Medição	14
3.2 - Processos de Excitação da Estrutura	15
3.3 - Formulação de Dinâmica Estrutural Subjacente	16
3.4 - Processamento Digital de Sinal	17
3.5 – Estimativas Discretas das Funções de Resposta em Frequência	22
4 - IDENTIFICAÇÃO DOS PARÂMETROS MODAIS	23
4.1 - Métodos de 1 grau de liberdade	23
4.2 - Métodos de N graus de liberdade	26
5 - EXEMPLOS DE APLICAÇÃO	29
6 - REFERÊNCIAS	30
ANEXOS	

IDENTIFICAÇÃO DINÂMICA DE SISTEMAS ESTRUTURAIS

Conceitos gerais

SUMÁRIO

O elevado desenvolvimento das técnicas e algoritmos de modelação analítica de estruturas verificado nas últimas décadas tem vindo a dar um ênfase crescente às técnicas de ensaio experimental de estruturas, em geral e à Identificação Dinâmica de Sistemas Estruturais, em particular. As técnicas experimentais em causa permitem não só a validação de modelos matemáticos como também o esclarecimento de certos efeitos cuja modelação por via analítica não é consensual.

No presente documento são apresentadas algumas técnicas acessíveis na Identificação de Sistemas Estruturais, realizada através de ensaios dinâmicos não destrutivos sobre estruturas à escala real. Particular ênfase é concedido à discriminação dos diversos tipos de ensaios dinâmicos experimentais sobre estruturas, às técnicas de análise e processamento digital de sinal, assim como aos algoritmos de identificação de sistemas estruturais.

Apresentam-se, a título de exemplo, as diversas componentes do sistema integrado de aquisição e tratamento de registos dinâmicos existente no LERM-ICIST. Algumas das aplicações deste sistema são ainda apresentadas, com destaque para os trabalhos de identificação dinâmica em condições de vibração ambiental realizados pelo CMEST, inicialmente, e pelo ICIST, nos tempos mais recentes.

1. INTRODUÇÃO

O comportamento dinâmico das estruturas pode ser reproduzido através de dois processos alternativos: modelação analítica ou modelação experimental. O primeiro processo consiste em desenvolver um *modelo matemático*¹ que reproduza o comportamento das estruturas quando sujeitas a acções supostamente conhecidas, o que pode ser feito no caso geral através do método dos elementos finitos. O segundo processo consiste na realização de ensaios experimentais sobre estruturas, à escala real ou reduzida, sujeitando-as a acções dinâmicas, eventualmente controladas. Estes ensaios têm por objectivo a recolha de informações estruturais que permitam extrapolar o comportamento face às acções dinâmicas em geral, e designadamente face à acção sísmica.

A segunda abordagem tem conhecido nas duas últimas décadas um desenvolvimento notável na sequência das generalizações das técnicas e equipamento experimental a par da crescente necessidade de aferição e validação de modelos matemáticos desenvolvidos à priori. A modelação experimental de estruturas tem permitido, nomeadamente, esclarecer algumas dificuldades registadas na modelação analítica no referente aos seguintes aspectos:

- contribuição dos elementos estruturais secundários ou não estruturais (paredes de alvenaria, painéis de fachada, etc.);
- interacção solo-estrutura;
- comportamento das paredes resistentes de betão armado;
- comportamento física e geometricamente não linear;
- comportamento de estruturas de alvenaria.

Além da validação e calibração dos modelos analíticos, a abordagem experimental tem sido aplicada com os seguintes objectivos:

- controle das estruturas cuja importância sócio-económica justifica um rigoroso conhecimento do modelo estrutural (pontes, barragens, plataformas *off-shore*, etc.). Este controle pode ser realizado durante a fase de recepção, através dos designados *ensaios de recepção*, ou na fase de exploração, através da monitorização do comportamento da mesma;
- avaliação de danos em estruturas, designadamente após a actuação de sismos intensos;

- caracterização das acções.

A caracterização experimental do comportamento dinâmico das estruturas pode, de acordo com os objectivos particulares, ser realizada através dos seguintes métodos:

- ensaios quase estáticos de componentes ou subestruturas;
- ensaios em mesa vibratória de modelos físicos, habitualmente à escala reduzida;
- ensaios pseudo-dinâmicos de componentes, de subestruturas ou de estruturas;
- identificação dinâmica de sistemas estruturais.

A identificação dinâmica de sistemas estruturais consiste na realização de ensaios dinâmicos não destrutivos sobre as estruturas, tendo por objectivo a identificação das características dinâmicas mais relevantes como sejam: as frequências próprias, as configurações modais e os coeficientes de amortecimento modais. Estes resultados podem, conseqüentemente, ser utilizados na calibração e validação de modelos numéricos.

Pretende-se com o presente documento apresentar e ilustrar a aplicação das diversas técnicas e métodos de índole experimental e analítica do âmbito da identificação dinâmica de sistemas estruturais.

¹ Também designado por *modelo numérico* embora, em rigor, se possam distinguir estes dois tipos de modelos

2. FORMULAÇÃO ANALÍTICA SUBJACENTE À IDENTIFICAÇÃO DINÂMICA DE SISTEMAS ESTRUTURAIS

2.1 Fundamentos de Dinâmica Estrutural

A solução das equações de movimento, expressa em termos da resposta em deslocamentos ao longo do tempo, depende da natureza da excitação aplicada. Demonstrar-se-á que, independentemente da excitação aplicada, é possível fazer intervir na formulação da resposta a designada *matriz função de receptância* $H(w)$, cuja estimativa constitui a primeira fase dos processos de identificação dinâmica. Esta entidade concentra em si toda a informação relevante sobre o comportamento dinâmico da estrutura em causa (trata-se duma entidade única que reduz toda a informação referente à distribuição de inércia, de rigidez e de amortecimento do sistema estrutural). Nas circunstâncias anteriores, a matriz função de receptância (à semelhança das restantes FRFs - Funções de Resposta em Frequência) constitui a “ponte” entre as características da acção e da consequente resposta estrutural.

Analisa-se seguidamente a resposta de sistemas física e geometricamente lineares, com amortecimento proporcional viscoso, às mais variadas excitações. Procurar-se-á, sempre que possível, fazer intervir matriz função de receptância $H(w)$ na formulação da resposta. Os resultados apresentados para os diferentes tipos de acções considerados têm em comum o facto de envolverem a transformação das equações de movimento de *coordenadas iniciais* para *coordenadas generalizadas*. Nestas circunstâncias, justifica-se relembra a natureza da transformação de coordenadas considerada.

Num sistema estrutural de N graus de liberdade, descrito pelo vector dos deslocamentos nodais em *coordenadas iniciais*² $q(t)$ (e correspondente vector $Q(t)$ das forças nodais aplicadas), a equação que descreve o equilíbrio dinâmico num determinado instante t é dada por:

$$M\ddot{q}(t) + C\dot{q}(t) + Kq(t) = Q(t) \quad (2.1)$$

em que M , C e K designam, pela ordem indicada, as matrizes de massa, de amortecimento viscoso e de rigidez e os sobrescritos $\dot{}$ e $\ddot{}$ referenciam a primeira e segunda derivadas com respeito ao tempo t .

A equação anterior pode ser reescrita em *coordenadas generalizadas* (também designadas por *coordenadas modais*) através da pré-multiplicação da mesma pela transposta da matriz F dos modos de vibração e fazendo intervir a transformação de

² mais vulgarmente, tratam-se de *coordenadas nodais*, ou seja, tratam-se dos deslocamentos (ou rotações) dos nós da discretização considerada segundo as direcções do referencial adoptado

coordenadas $\mathbf{q}(t)=F\mathbf{q}_G(t)$ entre coordenadas iniciais e coordenadas modais/generalizadas. Nestas circunstâncias, obtém-se:

$$\ddot{\mathbf{q}}_G(t) + [2\mathbf{z}\mathbf{p}] \dot{\mathbf{q}}_G(t) + [\mathbf{p}^2] \mathbf{q}_G(t) = \mathbf{F}^T \mathbf{Q}(t) = \mathbf{Q}_G(t) \quad (2.2)$$

em que $[\mathbf{p}^2]$ e $[2\mathbf{z}\mathbf{p}]$ referenciam as matrizes (diagonais) no novo sistema de coordenadas, sendo p e z as correspondentes frequências e coeficientes de amortecimento modais. A vantagem desta transformação de coordenadas reside, como se sabe, no facto das equações de movimento passarem a ser desacopladas³, passando-se consequentemente dum sistema de N equações diferenciais a N variáveis para um sistema de N equações diferenciais a uma variável cada uma.

2.1.1 Resposta em regime livre

Admitindo que o sistema é libertado duma configuração inicial deformada (\mathbf{q}_0) com um determinado campo inicial de velocidades ($\dot{\mathbf{q}}_0$) as grandezas correspondentes em termos das coordenadas modais são então:

$$\mathbf{q}_{G0}(t) = \mathbf{F}^{-1} \mathbf{q}_0 = \mathbf{F}^T \mathbf{M} \mathbf{q}_0 \quad (2.3a)$$

$$\dot{\mathbf{q}}_{G0}(t) = \mathbf{F}^{-1} \dot{\mathbf{q}}_0 = \mathbf{F}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}}_0 \quad (2.3b)$$

As condições anteriores são habitualmente designadas por *condições iniciais*, constituindo neste caso a única razão para a existência de movimento.

Para determinar a resposta em termos das coordenadas iniciais há apenas que determinar a resposta em cada uma das n coordenadas modais²

$$q_{Gn}(t) = e^{-x_n p_n t} \left(q_{Gn0} \cos(p_{dn} t) + \frac{q_{Gn0} + x_n p_n \dot{q}_{Gn0}}{p_{dn}} \text{sen}(p_{dn} t) \right) \quad (2.4)$$

e fazer a transformação modal. Na equação anterior p_{dn} designa a n -ésima frequência modal amortecida, sendo p_n e z_n a frequência e o coeficiente de amortecimento correspondentes à n -ésima coordenada generalizada.

Na formulação apresentada não intervem a matriz função de receptância. No entanto, este facto não invalida a possibilidade de identificação dinâmica em solicitações análogas. Com efeito, se a deformada inicial fôr *afim* dum determinado modo de vibração, ou seja se $\mathbf{q}_{G0} = \mathbf{a}\mathbf{f}_m$, facilmente se demonstra⁴ que apenas é excitado o modo em causa (m -ésimo modo no exemplo apresentado). Nestas circunstâncias, a estrutura irá vibrar exclusivamente

³ em virtude do facto das matrizes do sistema passarem a ser diagonais

⁴ através das condições de ortogonalidade entre os modos de vibração

no modo afim, pelo que se torna possível identificar a configuração modal, assim como a correspondente frequência e coeficiente de amortecimento. Idêntico resultado poderia ser extraído quando a estrutura é excitada através dum campo inicial de velocidades afim dum determinado modo de vibração, ou seja quando $\dot{\mathbf{q}}_{G0} = \mathbf{b}\mathbf{f}_m$.

2.1.2 Resposta a excitação harmónica

Considere-se agora o caso em que o sistema estrutural é sujeito a uma excitação de configuração $\bar{\mathbf{Q}}$, de amplitude variável harmonicamente no tempo com frequência w :

$$\mathbf{Q}(t) = \bar{\mathbf{Q}} e^{iwt} \quad (2.5)$$

A solução geral das equações, não homogéneas, de movimento, obtém-se através da sobreposição de duas soluções: solução particular das equações não homogéneas; e solução geral das equações homogéneas. Destas duas soluções, também designadas por *regime transitório* e *regime permanente*⁵ pela ordem atrás indicada, apenas nos interessa o regime permanente dado que é este que determina a resposta do sistema passada a fase inicial, casuística, de aplicação da excitação⁶. Outra das funções do regime transitório consiste na satisfação das condições iniciais do sistema em conjunto com o regime permanente que, contudo, não depende destas condições.

A resposta em regime permanente é também ela harmónica no tempo, de acordo com:

$$\mathbf{q}(t) = \bar{\mathbf{q}} e^{iwt} \quad (2.6)$$

Substituindo a solução anterior na equação do movimento (2.1) e explicitando em termos da configuração $\bar{\mathbf{q}}$ da resposta, obtém-se, para um instante t genérico:

$$\bar{\mathbf{q}} = \left(-w^2 \mathbf{M} + iw\mathbf{C} + \mathbf{K}\right)^{-1} \bar{\mathbf{Q}} = \mathbf{H}(w)\bar{\mathbf{Q}}$$

em que a configuração $\bar{\mathbf{q}}$ da resposta se relaciona com idêntica grandeza da excitação através da matriz função de receptância $\mathbf{H}(w)$, dada por:

$$\mathbf{H}(w) = \left(-w^2 \mathbf{M} + iw\mathbf{C} + \mathbf{K}\right)^{-1} \quad (2.7)$$

Da equação (2.6), conclui-se que o termo genérico $H_{mn}(w)$ é uma função complexa que traduz a amplitude e atraso de fase da resposta em regime permanente ao nível do m-

⁵ também designado por *regime forçado*

⁶ o regime transitório (solução particular das equações não homogéneas) está intimamente dependente do processo com que a excitação é aplicada na fase inicial, pelo que sai fora do contexto, mais generalista, do presente documento

ésimo g.l. quando uma excitação harmónica de amplitude unitária é aplicada no n-ésimo g.l.. A equação anterior demonstra ainda que a receptância $H(w)$ reduz toda a informação relevante para o comportamento dinâmico da estrutura, designadamente através da consideração da distribuição de inércia (M), de rigidez (K) e de amortecimento viscoso (C).

O significado de cada termo da matriz função de receptância torna-se mais esclarecedor quando considerada a formulação alternativa que faz intervir a matriz das configurações e restantes características modais. Com efeito, da equação (2.7) tem-se que:

$$H^{-1}(w) = [-w^2 M + iwC + K]$$

Pré-multiplicando ambos os membros por F^T , pós-multiplicando por F e fazendo intervir as condições de ortogonalidade entre os modos de vibração tem-se:

$$F^T H^{-1}(w) F = [-w^2 I + iw[2xp] + [p^2]]$$

desta feita, pré-multipliquem-se ambos os membros da equação anterior por F^{-T} e pós-multipliquem-se por F^{-1}

$$H^{-1}(w) = F^{-T} [-w^2 I + iw[2xp] + [p^2]] F^{-1}$$

invertendo ambos os membros

$$H(w) = F [-w^2 I + iw[2xp] + [p^2]]^{-1} F^T$$

A matriz intermédia, sendo a inversa duma matriz diagonal tem o termo diagonal genérico de índices (k,k) dado por:

$$\frac{1}{-w^2 + i2x_k p_k w + p_k^2}$$

Individualizando um termo, de índices genéricos (m,n) , da matriz função de receptância, tem-se:

$$H_{mn}(w) = \sum_{k=1}^N \frac{\Phi_{mk} \Phi_{nk}}{-w^2 + i2x_k p_k w + p_k^2} \quad (2.8)$$

Ao invés do verificado com a equação (2.7), a equação anterior permite a determinação individual de cada termo da matriz função de receptância. Outra das conclusões que ressalta da análise da equação (2.8) reside na simetria desta matriz função (o que poderia ser esperado de acordo com o princípio de Maxwell).

A receptância integra-se no quadro mais geral das FRFs ou Funções de Resposta em Frequência, nomeadamente com $Y(w)$ (*mobilidade*) e $I(w)$ (*inertância*) cujo significado é semelhante excepto no facto de que a resposta é nestas considerada respectivamente em termos de velocidades e acelerações, face a uma excitação harmónica. Estas novas grandezas relacionam-se com a receptância através das seguintes expressões:

$$Y(w) = iwH(w) \quad (2.9 a)$$

$$I(w) = -w^2 H(w) \quad (2.9 b)$$

2.1.3 Resposta a excitação periódica

Caso a excitação aplicada em cada g.l. seja de natureza periódica de período T , torna-se lícito, mediante certas hipóteses relativas à regularidade da excitação, substituí-la pela respectiva série de Fourier isto é:

$$Q(t) = Q(t + T) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikw_0 t} \quad (2.10)$$

em que w_0 define a frequência base da excitação⁷ e c_k designa o vector dos coeficientes de Fourier, determinados através de:

$$c_k = \frac{1}{T} \int_0^T Q(t) e^{-ikw_0 t} dt$$

Nestas circunstâncias, a resposta em regime permanente é também periódica de período T e relaciona-se com a série de Fourier da excitação através da matriz função de receptância, ou seja:

$$q(t) = \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{+\infty} H(kw_0) c_k e^{ikw_0 t} \quad (2.11)$$

que permite concluir que a série de Fourier da resposta se obtém transformando a série de Fourier da excitação através da matriz função de receptância. A ressalva para $k \neq 0$ justifica-se pelo facto da componente estática, de frequência nula, da excitação ser habitualmente

⁷ $w_0 = \frac{2p}{T}$

associada ao regime transitório, conjuntamente com a satisfação das condições iniciais do sistema. Existem, no entanto, autores que incluem este termo na série anterior⁸.

2.1.4 Resposta a excitações determinísticas não periódicas

Também para o caso geral das excitações determinísticas não periódicas (ou de período infinito) que verifiquem as condições necessárias para a substituição pelo seu integral de Fourier, a formulação da resposta faz intervir a matriz função de receptância da seguinte forma:

$$\mathbf{q}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathfrak{S}\{\mathbf{q}\}(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{H}(\omega) \mathfrak{S}\{\mathbf{Q}\} e^{i\omega t} d\omega \quad (2.12)$$

em que $\mathfrak{S}\{\ }(\omega)$ denota "transformada de Fourier de ..".

Paralelamente a esta análise, designada por *análise no domínio da frequência*, desenvolve-se a *análise no domínio do tempo* que faz intervir a matriz *função resposta ao impulso instantâneo* unitário $\mathbf{h}(t) = [h_{mn}(t)]$ em que a resposta ao nível do m-ésimo g.l. é obtida através da generalização do integral de Duhamel

$$q_m(t) = \sum_{n=1}^N \int_0^t Q_n(t) h_{mn}(t-t) dt \quad (2.13)$$

e em que estes dois tipos de análise se interrelacionam através de

$$\mathbf{H}(\omega) = \mathfrak{S}\{\mathbf{h}\}(\omega) \quad \mathbf{h}(t) = \mathfrak{S}^{-1}\{\mathbf{H}\}(t) \quad (2.14 \text{ a, b)}$$

sendo $\mathfrak{S}^{-1}\{\ }$ a transformada inversa de Fourier.

2.1.5 Resposta a excitações estocásticas

Considere-se a situação em que o sistema mecânico é sujeito a uma excitação que constitui um processo estocástico estacionário ergódico. Nestas circunstâncias a excitação pode ser caracterizada pelas entidades:

$\mathbf{R}^{QQ}(t)$ - auto matriz função de autocorrelação da excitação

$\mathbf{S}^{QQ}(\omega)$ - auto matriz função densidade espectral de potência da excitação

que se definem e relacionam através das seguintes propriedades

⁸ neste caso o termo de ordem nula da excitação (c_0) vem afectado da matriz função de transferência, determinada para $\omega=0$, ao que corresponde a matriz de flexibilidade da estrutura

$$R_{mn}^{QQ}(t) = E(Q_m(t)Q_n(t+t)) \quad (2.15)$$

$$\mathbf{S}^{QQ}(\mathbf{w}) = \mathfrak{F}\{\mathbf{R}^{QQ}\}(\mathbf{w}) \quad \mathbf{R}^{QQ}(t) = \mathfrak{F}^{-1}\{\mathbf{S}^{QQ}\}(t) \quad (2.16 \text{ a, b})$$

em que $E(\dots)$ denota "valor expectável no tempo de ..".

De idêntica forma se definem as matrizes função cruzadas (excitação - resposta e reciprocamente):

$$R_{mn}^{Qq}(t) = E(Q_m(t)q_n(t+t)) \quad (2.17)$$

$$\mathbf{S}^{Qq}(\mathbf{w}) = \mathfrak{F}\{\mathbf{R}^{Qq}\}(\mathbf{w}) \quad \mathbf{R}^{Qq}(t) = \mathfrak{F}^{-1}\{\mathbf{S}^{Qq}\}(t) \quad (2.18 \text{ a, b})$$

Na classe de sistemas mecânicos escolhidos a resposta constitui ainda um processo estocástico ergódico estacionário caracterizado pelas auto matrizes função de autocorrelação da resposta

$$R_{mn}^{qq} = E(q_m(t)q_n(t+t)) \quad \mathbf{S}^{qq}(\mathbf{w}) = \mathfrak{F}\{\mathbf{R}^{qq}\}(\mathbf{w}) \quad (2.19 \text{ a, b})$$

E ainda possível demonstrar que estas entidades se relacionam reciprocamente através da matriz função de transferência, isto é:

$$\mathbf{S}^{qq}(\mathbf{w}) = \mathbf{H}(\mathbf{w})\mathbf{S}^{QQ}(\mathbf{w})\mathbf{H}^{*T}(\mathbf{w}) \quad (2.20)$$

$$\mathbf{S}^{qQ}(\mathbf{w}) = \mathbf{H}(\mathbf{w})\mathbf{S}^{QQ}(\mathbf{w}) \quad (2.21)$$

$$\mathbf{S}^{qQ}(\mathbf{w}) = \mathbf{S}^{qQ}(\mathbf{w})\mathbf{H}^{*T}(\mathbf{w}) \quad (2.22)$$

em que o sobrescrito * significa tratar-se do complexo conjugado.

2.2 Propriedades da função de receptância

A fase inicial dos algoritmos de identificação expostos na secção 4 consiste em, com base no andamento genérico dos elementos de $\mathbf{H}(\mathbf{w})$ determinados experimentalmente, obter as aproximações iniciais para os parâmetros modais. Nestas circunstâncias é então do maior interesse observar o seu andamento geral e, com particular detalhe, na vizinhança das frequências próprias.

Para ilustrar algumas das propriedades desenvolveu-se um modelo numérico de uma estrutura porticada tridimensional, designado de *exemplo modelo*, e analisou-se a resposta desta estrutura com recurso a um programa de cálculo automático. As frequências próprias

assim determinadas são as seguintes: $p_1=18.36$, $p_2=21.01$, $p_3=35.66$, $p_4=60.48$, etc. rad/s. O Anexo II contem alguma da informação relevante sobre este exemplo modelo.

Demonstra-se que a existência de amortecimento se traduz, para além da introdução de um termo complexo responsável pelo desfasamento entre a acção e a resposta, num "suavizar" da dependência dos elementos da matriz função de receptância relativamente à frequência w , de excitação. Na ausência de amortecimento, a expressão para o termo genérico (m,n) de $H(w)$ degenera em:

$$H_{mn}(w) = \frac{f_{m1}f_{n1}}{p_1^2 - w^2} + \frac{f_{m2}f_{n2}}{p_2^2 - w^2} + \dots + \frac{f_{mk}f_{nk}}{p_k^2 - w^2} + \dots + \frac{f_{mN}f_{nN}}{p_N^2 - w^2} \quad (2.23)$$

sendo f_{mk} o termo genérico da matriz F dos modos de vibração.

Nestas circunstâncias conclui-se que a função de receptância é a soma algébrica das contribuições dos diversos modos, sendo que a contribuição de cada modo é determinada por:

- o numerador $f_{mk} f_{nk}$ que representa o produto, para um determinado modo k de vibração, dos elementos relativos aos g.l. em que é medida a resposta e aplicada a excitação. Quando o modo não se desenvolve segundo o g.l. m ou n , o numerador anula-se, pelo que a contribuição do modo é também ela nula.
- o denominador, que traduz a proximidade da frequência de excitação relativamente à frequência p_k correspondente ao modo em causa. Quando a frequência de excitação se aproxima da frequência dum determinado modo, o termo correspondente a esse modo é claramente dominante sobre os restantes⁹.

As Figs. 2.1 a) e b) exemplificam o elemento (7,7) da matriz função de receptância do exemplo modelo, respectivamente no formato de Bode (módulo vs. frequência e fase vs. frequência) e de Nyquist (partes real e imaginária vs. frequência).

⁹ desde que os valores de f_k correspondentes aos g.l. da excitação e da resposta sejam não nulos

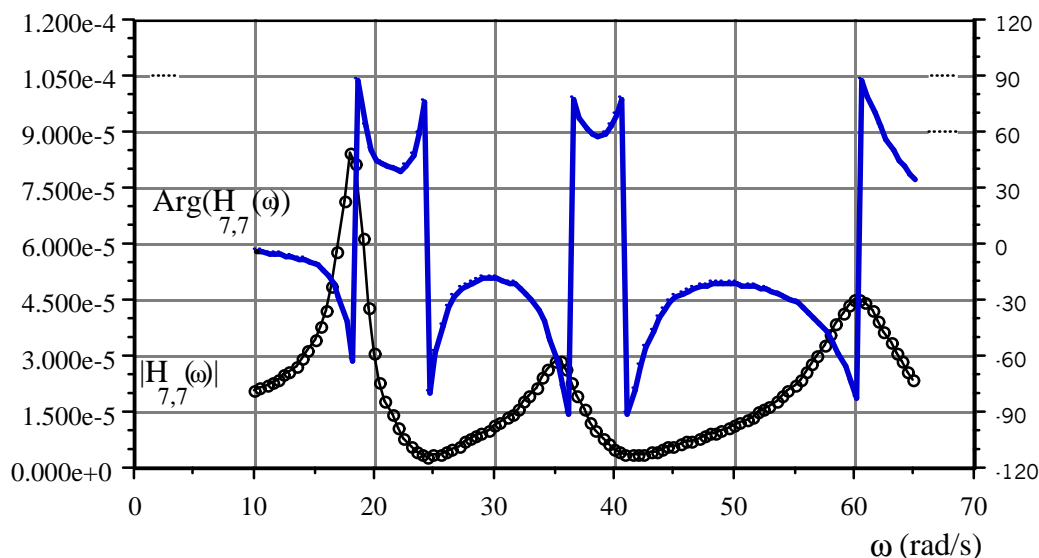


Fig. 2.1 a) Gráfico de $H_{7,7}$ (Bode)

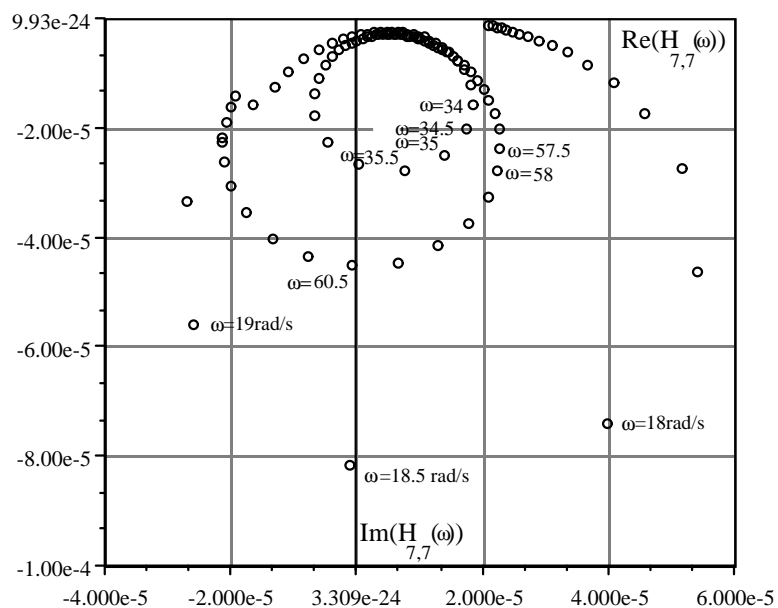


Fig. 2.1 b) Gráfico de $H_{7,7}$ (Nyquist)

Observe-se, na Fig.2. 1 a), que o elemento seleccionado exhibe ressonância do módulo a par de mudança brusca de fase na proximidade das frequências próprias do sistema. Relativamente à Fig. 2.1 b) repare-se que, na vizinhança das frequências próprias do exemplo modelo, o gráfico de Nyquist se assemelha a uma circunferência perfeita caracterizada por uma variação acelerada de coordenadas. Este facto manifesta-se através do aumento da taxa de varrimento do círculo modal (expresso na maior distância entre

pontos próximos das frequências próprias quando se adopta uma discretização uniforme em frequência).

Em qualquer das representações anteriores se observa a inexistência de ressonância, nas diversas formas que esta se reveste, para frequências próximas da frequência do 2º modo. Esta circunstância fica a dever-se ao facto de que o modo em causa se desenvolver segundo a direcção normal à do g.l. 7 ($f_{72} \gg 0$) pelo que o respectivo termo na equação 2.8 é praticamente nulo.

3. TÉCNICAS DE MEDIÇÃO EXPERIMENTAL DAS FRFs

3.1 Sistema de Medição

Apresenta-se seguidamente, na Figura 3.1, a representação esquemática de um sistema geral de medição, registo e tratamento de vibrações.

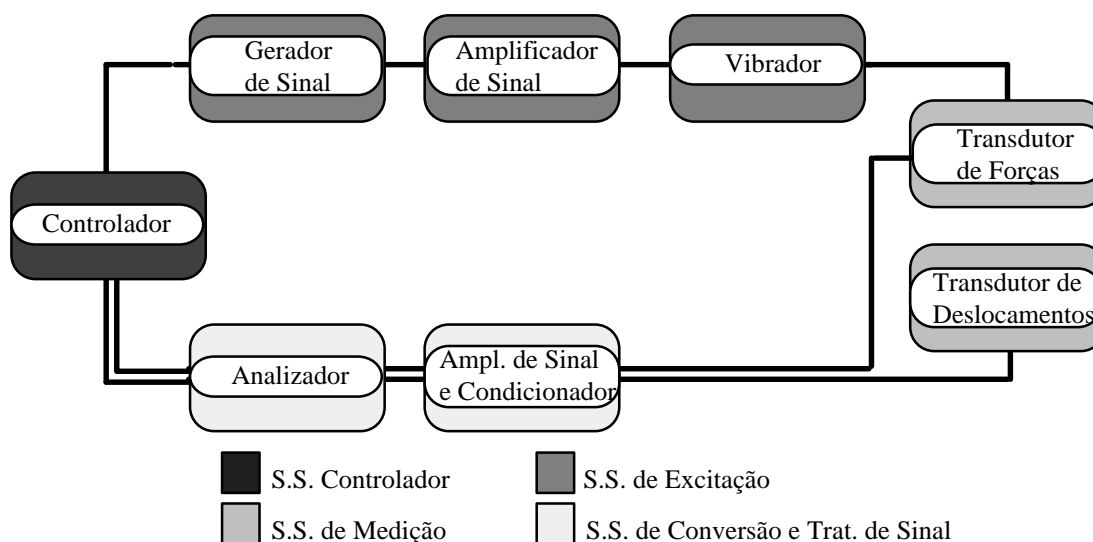


Fig. 3.1 - Componentes de sistema de medição de vibrações

No esquema anterior é possível agrupar as componentes nos seguintes 4 sub-sistemas distintos: controlador; excitação; medição e conversão/tratamento de sinal.

O controlador é habitualmente um microcomputador que procede à gestão do ensaio através do controle da excitação, da aquisição dos sinais de resposta, e consequente estimativa dos valores discretos das funções de resposta em frequência. O sub-sistema de excitação é responsável pela aplicação duma excitação com características controladas, designadamente em termos de intensidade, frequência, etc.. O sub-sistema de medição é responsável pela medição simultânea dos sinais da excitação e da resposta, nomeadamente através de acelerómetros e de transdutores de força. Finalmente, o sub-sistema de conversão e tratamento de sinal destina-se à amplificação dos sinais (habitualmente fracos) debitados pelos transdutores de excitação e resposta, o que é feito em simultâneo com o condicionamento de sinais, ao que se segue a digitalização¹⁰ dos mesmos e consequente análise espectral.

¹⁰ os sinais contínuos da acção e da resposta são amostrados regularmente no tempo, sendo os subsequentes passos realizados com os correspondentes sinais discretos

Em muitas das aplicações em engenharia civil o sistema geral anteriormente descrito é simplificado através da omissão do sistema de excitação, sendo os ensaios conduzidos em condições de vibração ambiente.

3.2 Processos de Excitação da Estrutura

De acordo com a fonte geradora de vibrações, os processos de excitação da estrutura podem ser subdivididos em três classes: vibração ambiente; vibração transitória e vibração forçada.

3.2.1 Vibração ambiente.

Nesta classe são englobados todos os fenómenos vibratórios observados nas estruturas em condições normais de exploração. Em geral, a fonte, não controlada, das vibrações é determinada pela utilização da estrutura. Esta poderá ser devida aos seguintes factores: vento; microtremores; movimento humano; tráfego; forças geradas por sistemas electro-mecânicos constituintes da estrutura em causa e outros.

Estes ensaios apresentam como grande vantagem a possibilidade de dispensarem o recurso a vibradores, com a consequente simplificação dos processos de ensaio que podem, inclusivé, ser realizados sem perturbação para a exploração da estrutura. Torna-se necessário, no entanto, admitir algumas hipóteses relativas à natureza da excitação¹¹, o que poderá colocar reservas aos resultados obtidos. O facto da vibração observada ser duma intensidade significativamente inferior àquela que caracteriza a sua resposta face um sismo intenso poderá, também, colocar reservas na extrapolação dos resultados experimentais para os modelos considerados na análise sísmica da estrutura.

3.2.2 Vibração transitória

Englobam-se nesta classe todas as situações em que a estrutura é excitada para além dos níveis observados em condições normais de exploração, originando uma resposta exclusivamente transitória. É corrente distinguir os seguintes tipos de vibrações transitórias:

- vibrações em regime livre. Dentro deste tipo há a distinguir os ensaios em que a vibração registada é devida a um campo de deslocamentos iniciais, libertando a estrutura bruscamente de uma posição deformada, ou devida a um campo de velocidades iniciais, através de impacto sobre a estrutura;

¹¹ designadamente, assumindo que a excitação é assimilável a um processo estocástico de banda larga

- sismos naturais;
- sismos artificiais. Explosões subterrâneas ou a proximidade de minas têm sido aproveitadas para o presente objectivo.

3.2.3 Vibrações forçadas

Constituem esta classe todas os processos artificiais de excitação que conduzem as respostas de apreciável intensidade em regime forçado. Relativamente ao facto de o período de análise T_a exceder ou não o período de excitação T_e podem ainda distinguir-se as seguintes situações:

- vibrações transientes (ex: vibrações provocadas por marreta). $T_a > T_e$;
- vibrações estritamente forçadas (ex: vibrações provocadas por vibrador mecânico rotativo, electrohidráulico ou electromagnético). $T_a \leq T_e$.

3.3 Formulação de dinâmica estrutural subjacente

A formulação de dinâmica estrutural adequada à determinação dos valores discretos das FRFs depende naturalmente da natureza analítica do processo de excitação e divide-se nas seguintes possibilidades:

- excitação harmónica por níveis. Neste tipo de ensaios que induz vibrações estritamente forçadas é comunicado ao vibrador um sinal harmónico de frequência, intensidade e fase controladas. A cada ensaio corresponde um valor discreto da FRF em causa e há a necessidade de repetir o ensaio tantas as vezes quantos o n^o de valores discretos pretendidos;
- varrimento em seno lento. Consiste em comunicar ao vibrador um sinal harmónico de frequência lentamente (de) crescente e contabilizar, a cada nível de frequência, o respectivo valor discreto da FRF;
- excitação periódica. É comunicado ao vibrador um sinal que contem não uma mas um conjunto exaustivo de frequências múltiplas e que assim constituem um sinal periódico. A subsequente análise espectral da excitação e resposta fornece os valores discretos da FRF para as frequências múltiplas;
- excitação estocástica. Consiste na geração dum sinal puramente aleatório que, em aplicações práticas, se obtém através do recurso a um gerador de ruído. A extracção dos valores discretos das FRFs consegue-se através da análise

espectral da excitação e resposta e inter-relacionamento das matrizes função densidade espectral de potência destas (auto e cruzadas);

- excitação transiente. Neste tipo de ensaios apresentam-se as seguintes alternativas relativamente à formulação utilizada para extracção dos valores discretos das FRFs:
 - assimilando a excitação a uma excitação estocástica e utilizando as expressões veiculadas pela rubrica anterior;
 - assimilando a excitação a um processo periódico de período suficientemente longo e utilizando as expressões correspondentes.

Dos estudos comparativos realizados conclui-se que a diminuição do intervalo de discretização (ou de digitalização) conduz a melhores aproximações particularmente no domínio das frequências mais elevadas onde os resultados nem sempre são consistentes. A menor consistência dos resultados de alta frequência dever-se-á ao facto de que, sendo as séries de Fourier da excitação ou da resposta necessariamente convergentes, os termos de maior ordem apresentam amplitudes decrescentes, pelo que as suas estimativas são mais facilmente “contamináveis” pelo ruído ambiente.

Independentemente da formulação analítica envolvida, sublinhe-se a necessidade de:

- a) adequar a taxa de digitalização à gama de frequências a analisar (sob pena de subestimar os elementos relativos aos modos superiores) e b) contabilizar correctamente os efeitos do amortecimento em todos os tipos de ensaios em que se desenvolve um regime transitório significativo.

3.4 Processamento Digital de Sinal

A aquisição dos sinais, de força ou de aceleração, é realizada através da sua digitalização, processo que traduz a amostragem regular no tempo e pelo qual o sinal contínuo é substituído por um sinal discreto. Nestas circunstâncias, todos os subsequentes processos de determinação das estimativas espectrais são realizados com o sinal discreto fazendo uso de procedimentos do âmbito da *Teoria do Processamento Digital de Sinal*, com amplas aplicações nas mais variadas áreas de conhecimento.

Segue-se uma breve apresentação dos resultados mais relevantes desta teoria, tendo em conta a especificidade dos problemas encontrados.

3.4.1 Transformada Discreta de Fourier

Considere-se inicialmente uma amostra finita $x(t)$ dum sinal contínuo no tempo¹², correspondente a um período de observação de T . Admitindo tratar-se dum processo periódico no período de observação, torna-se lícito substituí-lo pela respectiva série de Fourier, isto é:

$$x(t) = \sum_{m=0}^{+\infty} X_m e^{i 2mp \frac{t}{T}} \quad X_m = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) e^{-i 2mp \frac{t}{T}} dt \quad (3.1)$$

A *notação compacta* das expressões anteriores pode ser substituída seguinte *notação alternativa*:

$$x(t) = a_0 / 2 + \sum_{m=1}^{+\infty} a_m \cos(2mpt/T) + b_m \sin(2mpt/T)$$

em que os coeficientes de Fourier, a_m e b_m , são determinados através das seguintes expressões:

$$a_m = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \cos(2mpt / T) dt \quad b_m = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \sin(2mpt / T) dt$$

O sinal contínuo $x(t)$ é substituído, dada a natureza dos aparelhos de medição e registo, por um sinal discreto x_k ($k=1,2,..N$), correspondente à amostragem regular do sinal original com intervalo de digitalização D .

Observe-se que, em consequência da discretização do sinal com um intervalo finito D , as componentes do sinal correspondentes às altas frequências não são devidamente reproduzidas. Demonstra-se que existe uma frequência – frequência de Nyquist, a partir da qual a discretização adoptada não permite discriminar das frequências inferiores. Esta frequência relaciona-se com o intervalo de discretização D através da seguinte expressão (em frequência circular):

$$f_{Ny} = \frac{1}{2D}$$

Com efeito, considerem-se dois sinais cosinoidais $x_1 = \cos(2pf_1t)$ e $x_2 = \cos(2pf_2t)$ cujas frequências, f_1 ($< f_{Ny}$) e f_2 ($> f_{Ny}$), são simétricas relativamente á frequência de Nyquist, ou seja $f_{Ny} - f_1 = f_2 - f_{Ny}$ ou, equivalentemente, $f_2 = 2f_{Ny} - f_1$. Nas circunstâncias anteriores,

¹² Nos casos em apreciação este sinal pode traduzir a resposta - em aceleração, velocidade ou deslocamento, registada num determinado ponto da estrutura segundo uma determinada direcção

considerando o instante $t=kD$ e os correspondentes valores dos sinais discretos $x_{1k}=x_1(kD)$ e $x_{2k}=x_2(kD)$, ter-se-ia:

$$x_{1k} = \cos(2pf_1kD)$$

e

$$x_{2k} = \cos(2pf_2kD) = \cos(2p2f_{Ny}kD - 2pf_1kD) = \cos(2p2f_{Ny}kD)\cos(2pf_1kD) + \text{sen}(2p2f_{Ny}kD)\text{sen}(2pf_1kD)$$

que, tendo em conta a expressão da frequência de Nyquist, pode ser simplificada

$$\begin{aligned} x_{2k} &= \cos(2pk)\cos(2pf_1kD) + \text{sen}(2pk)\text{sen}(2pf_1kD) = \\ &= 1 \times \cos(2pf_1kD) + 0 \times \text{sen}(2pf_1kD) = x_{1k} \end{aligned}$$

Nas circunstâncias anteriores conclui-se que, em consequência da discretização, os sinais contínuos $x_1(t)$ e de $x_2(t)$ produzem sinais discretos coincidentes. Idêntica conclusão¹³ poderia ser extraída no caso de sinais sinusoidais. Este efeito é vulgarmente designado na bibliografia anglo-saxónica por *aliasing*.

A série de Fourier do sinal encontra-se consequentemente truncada ao termo de ordem M , correspondente à frequência de Nyquist, sendo que $M=N/2$ ou $M=(N-1)/2$, respectivamente para os casos em que a dimensão do sinal discreto é par ou ímpar. A estes termos acresce o termo de ordem 0 (X_0 ou a_0 , consoante a notação adoptada), pelo que o número total de termos é na realidade de $M+1$.

À operação que faz corresponder ao sinal discreto x_k os correspondentes coeficientes de Fourier X_m é designada por Transformada Discreta Finita de Fourier ou, simplesmente, DFT¹⁴. A relação entre sinal discreto e a sua transformada discreta finita de Fourier pode ser expressa em notação compacta através de:

$$x_k = x(kD) = \sum_{m=0}^M X_m e^{i2mpk/N} \quad (3.2)$$

ou, em notação alternativa

$$x(t) = a_0 / 2 + \sum_{m=1}^M a_m \cos(2mpt/T) + b_m \text{sen}(2mpt/T)$$

¹³ neste caso ter-se-ia que $x_{2k}=\text{sen}(2pf_2kD)=-x_{1k}=\text{sen}(2pf_1kD)$

¹⁴ de *Discrete Fourier Transform*, no original

Refira-se que, na indisponibilidade do conhecimento do processo contínuo no tempo, a determinação dos coeficientes de Fourier X_m pode ser realizada por integração numérica, obtendo-se:

$$X_m = \frac{1}{ND} \sum_{k=1}^N D x_k e^{-i 2mp \frac{kD}{ND}} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_k e^{-i 2mp \frac{k}{N}} \quad (3.3)$$

ou, em notação alternativa

$$a_m = \frac{2}{N} \sum_{k=1}^N x_k \cos(2mpk / N) \quad b_m = \frac{2}{N} \sum_{k=1}^N x_k \text{sen}(2mpk / N)$$

A integração numérica encontra-se ilustrada na Fig. 3.2 através da soma algébrica das áreas a sombreado correspondentes à determinação do termo genérico a_m da notação alternativa.

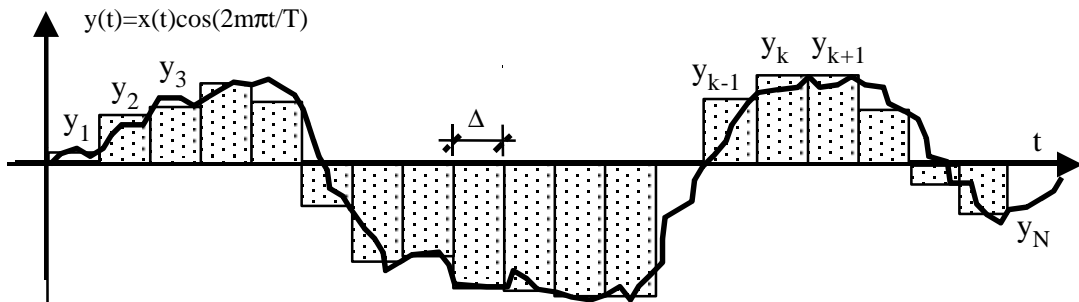


Fig. 3.2 – Exemplo de determinação numérica dos coeficientes de Fourier.

Quanto ao número $M+1$ de termos da transformada discreta finita de Fourier, observe-se que os coeficientes de Fourier a_m, b_m podem alternativamente ser determinados por forma a satisfazer as seguintes igualdades para cada um dos N instantes considerados:

$$x_k = a_0 / 2 + a_1 \cos(2pk / N) + b_1 \text{sen}(2pk / N) + \dots + a_M \cos(2pMk / N) + b_M \text{sen}(2pMk / N)$$

em que $k=1,2,..N$. Estas igualdades podem ser escritas matricialmente da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & \cos(2p / N) & \text{sen}(2p / N) & \dots & \cos(2pM / N) & \text{sen}(2pM / N) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0.5 & \cos(2pk / N) & \text{sen}(2pk / N) & \dots & \cos(2pMk / N) & \text{sen}(2pMk / N) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0.5 & \cos(2p) & \text{sen}(2p) & \dots & \cos(2pM) & \text{sen}(2pM) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ b_1 \\ \vdots \\ a_M \\ b_M \end{bmatrix}$$

Quando o número N de pontos do sinal discreto é par os coeficientes que afectam o termo b_M são todos nulos pelo que se conclui que o seu valor é irrelevante não constituindo variável. Quando N é ímpar todos os termos $a_0, a_1, b_1, \dots, a_M$ e b_M são relevantes, constituindo variáveis. Neste caso o sistema é determinado quando M é dado por:

$$N \text{ par} \Rightarrow M=N/2$$

$$N \text{ ímpar} \Rightarrow M=(N-1)/2$$

A morosidade computacional do algoritmo TDF (ou DFT na designação anglo-saxónica) quando aplicado em situações práticas de registos relativamente extensos foi obviada por J.W.Cooley e J.W.Tukey através do algoritmo FFT -Fast Fourier Transform, que permite reduzir o número de multiplicações de N^2 para $N.\log(2)$. A única restrição à aplicação do algoritmo FFT consiste na obrigatoriedade de a dimensão N do registo ser uma potência inteira de 2.

Observe-se, por fim, que é possível determinar os valores discretos da função densidade espectral de potência a partir dos coeficientes de Fourier, como atrás definidos. A correlação entre estas duas grandezas depende da natureza da excitação - discriminando-se as situações em que esta é periódica, estocástica ou transiente, sendo dada por equações do tipo:

$$S_m = \mathbf{b}X_m X_m^{*T}$$

3.4.2 Limitações da DFT

Resultando o algoritmo DFT descrito de estimativas numéricas de processos discretos no domínio do tempo é corrente distinguir as seguintes limitações:

- intervalo de tempo de registo é finito. Origina os seguintes problemas:
 - limitações de resolução no domínio da frequência, dada por $2p/T$, em frequência angular, ou por $1/T$ em frequência circular.
 - perturbações nas extremidades do intervalo. Este efeito, designado por *leakage* na literatura anglo-saxónica, resulta da não periodicidade do processo, quer por o intervalo analisado não ser múltiplo inteiro do período deste, quer ainda devido às perturbações que ocorrem nas extremidades do intervalo (efeitos do regime transitório, etc.). Em qualquer das situações referidas verifica-se uma maior dispersão em torno das regiões de maior concentração espectral do que o previsto. No sentido de obstar a este efeito é corrente

passar-se o registo por uma "janela" no tempo que diminui a importância relativa das extremidades do intervalo;

- A representação no domínio do tempo é discreta originando o efeito de *Aliasing*. Estando a frequência máxima limitada pelo intervalo D de discretização no tempo, as componentes espectrais com frequência superior à frequência de Nyquist aparecem "reflectidas" nas estimativas referentes a frequências inferiores (Fig. 3.3).

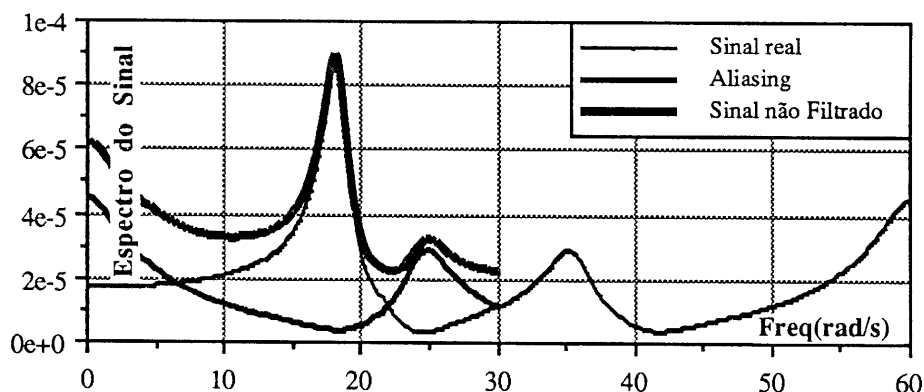


Fig.3.3 - Efeito de *Aliasing* nas estimativas espectrais (freq. Nyquist de 30 rad/s)

Na bibliografia especializada reconhecem-se os seguintes dois processos de eliminar o efeito de *Aliasing*: a) aumento da taxa de digitalização do sinal por forma a abarcar todas as frequências significativas que constituem o mesmo e b) filtragem do sinal através dum filtro analógico passa-baixo regulado em função da frequência de Nyquist (esta operação deve ser realizada anteriormente à digitalização do sinal).

3.5 Estimativas Discretas da Função de Resposta em Frequência

Em geral, a determinação das estimativas da função de resposta em frequência é realizada comparando as transformadas discretas finitas de Fourier¹⁵ da acção e da resposta para frequências idênticas. Este processo pode ser realizado individualmente por frequência (ex: excitação harmónica) ou simultaneamente para um determinado conjunto de frequências (excitação periódica ou estocástica). Em qualquer dos casos anteriores podem ser utilizados os resultados expostos em 2.

¹⁵ ou, indiferentemente, comparando as estimativas das densidades espectrais de potência da excitação e da resposta

4. IDENTIFICAÇÃO DOS PARÂMETROS MODAIS

Aborda-se nesta secção a identificação dos parâmetros modais (frequências próprias, coeficientes de amortecimento e configurações modais) com base nos valores discretos da matriz função de receptância. A apresentação dos diferentes métodos é realizada distinguindo os métodos em que se assumem determinadas simplificações redutoras a sistemas de 1 g.l. de aqueles em que é considerada a contribuição simultânea de todos os N graus de liberdade.

4.1 Métodos de 1 Grau de Liberdade

Esta designação engloba os procedimentos em que os valores experimentais discretos são ajustados por troços a expressões simplificadas que são, por sua vez, obtidas através da eliminação da contribuição de todos os modos com a excepção do modo cuja frequência é mais próxima da frequência de excitação em análise –*modo ressonante*. De facto, para frequências de excitação adjacentes à frequência do modo genérico k a expressão do termo (m,n) da matriz função de receptância pode ser simplificada eliminando a contribuição de todos os modos com a excepção do modo de índice k . Nestas circunstâncias obtém-se:

$$H_{mn}(w) = \frac{F_{mk}F_{nk}}{(p_k^2 - w^2) + i2x_k p_k w} \quad (4.1)$$

Após a simplificação anterior, é ainda possível distinguir os seguintes procedimentos:

Método da Amplitude de Pico. Consiste nos seguintes passos:

- determinação da frequência do modo k através do pico de $|H_{mn}(w)|$;
- determinação do respectivo coeficiente de amortecimento modal através do método dos pontos de meia potência (em que w_a e w_b designam as abcissas dos pontos de meia potência);

$$x_k = \frac{w_b - w_a}{w_b + w_a} \quad (4.2)$$

- determinação do parâmetro modal.

$$f_{mk}f_{nk} = 2p_k^2 x_k H_{mn}(w = p_k) \quad (4.3)$$

Método da Circunferência Modal. Eliminando as parcelas responsáveis pelos modos não ressonantes o termo genérico (m,n) da matriz função de mobilidade $\mathbf{Y}(w)$ degenera em:

$$Re(Y_{mn}(w)) = \frac{F_{mk}F_{nk}2x_k p_k w^2}{(p_k^2 + w^2)^2 + (2x_k p_k w)^2} \quad (4.4 a)$$

$$Im(Y_{mn}(w)) = \frac{F_{mk}F_{nk}w(p_k^2 - w^2)}{(p_k^2 + w^2)^2 + (2x_k p_k w)^2} \quad (4.4 b)$$

o que origina uma circunferência quando representado no formato de Nyquist como se representa nas Figs. 4.1.

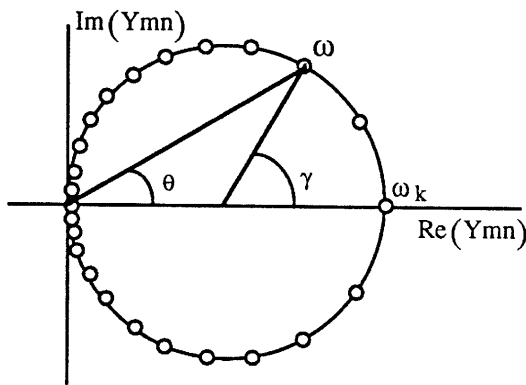


Fig. 4.1 a)- Gráfico de Y_{mn} (w qualquer)

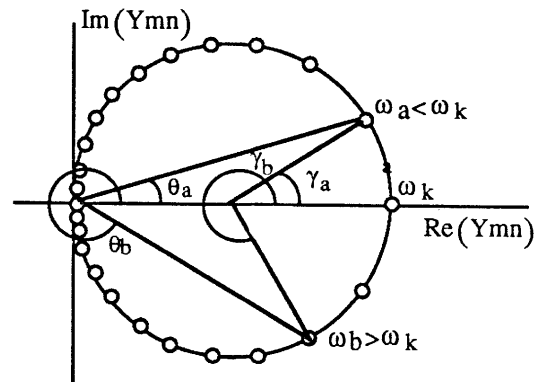


Fig. 4.1 b)- Gráfico de Y_{mn} ($w_a < p_k < w_b$)

A título ilustrativo observe-se a Fig. 4.2 que representa, no formato de Nyquist, o elemento (7,7) do exemplo modelo.

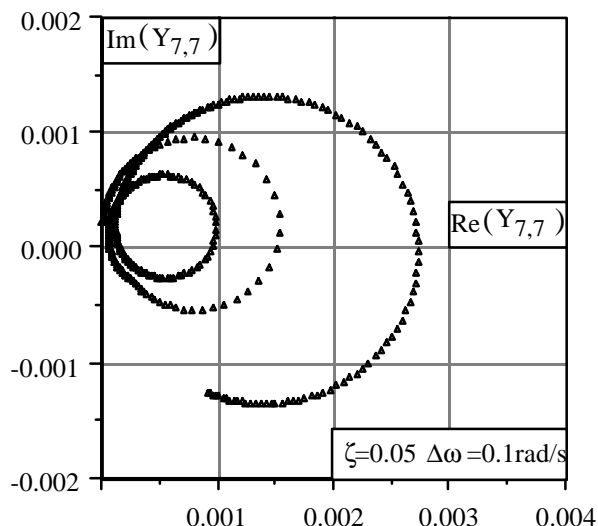


Fig.4.2 – Elemento $Y_{7,7}$ do exemplo modelo (formato de Nyquist)

Nas circunstâncias anteriores, este procedimento envolve as seguintes fases:

- determinação da frequência própria através da intersecção da circunferência com o eixo real ou, caso não se disponha desse ponto, através da determinação da frequência para a qual é máxima a taxa de varrimento da circunferência modal;
- determinação do coeficiente de amortecimento modal através da seguinte equação (em que w_a e w_b são quaisquer frequências inferior e superior à frequência própria);

$$x_k = \frac{w_a^2 - w_b^2}{2\rho_k \left[w_b \operatorname{tg}\left(\frac{g_b}{2}\right) - w_a \operatorname{tg}\left(\frac{g_a}{2}\right) \right]} \quad (4.5)$$

Esta expressão pode ser deduzida indirectamente através da Fig. 4.1 a) comportando, como caso particular, a equação do método dos pontos de meia potência com $g_a=90^\circ$ e $g_b=270^\circ$.

- determinação do parâmetro modal através;

$$F_{mk} F_{nk} = 2x_k \rho_k D_{mn} \quad (4.6)$$

em que D_{mn} representa o diâmetro da circunferência modal.

Da aplicação deste dois procedimentos ao exemplo modelo conclui-se que os métodos de 1 g.l. conduzem a boas estimativas para os parâmetros modais em estruturas com baixo acoplamento modal. Esta designação engloba estruturas com baixos coeficientes

de amortecimento modais e/ou com modos suficientemente "distanciados". Independentemente do tipo de estrutura o Método da Circunferência Modal conduz a melhores aproximações uma vez que não depende explicitamente dos pontos seleccionados mas sim da circunferência por estes produzida.

4.2 Métodos de N Graus de Liberdade

Esta classe de métodos distingue-se pelo facto de contabilizar numa forma mais ou menos simplificada a contribuição dos modos não ressonantes.

Generalização dos métodos de 1 g.l. Neste método apenas são consideradas explicitamente as contribuições dos modos com frequências próximas da frequência w de análise. Designando por n_1 e n_2 o primeiro e último modo com frequências próprias compreendidas na gama de frequência seleccionada, tem-se:

$$H_{mn}(w) = \sum_{j=1}^{n_1-1} \frac{F_{mj}F_{nj}}{(p_j^2 - w^2) + i2x_j p_j w} + \sum_{j=n_1}^{n_2} \frac{F_{mj}F_{nj}}{(p_j^2 - w^2) + i2x_j p_j w} + \sum_{j=n_2+1}^N \frac{F_{mj}F_{nj}}{(p_j^2 - w^2) + i2x_j p_j w} \quad (4.7)$$

ou ainda, substituindo os termos associados aos modos inferiores e superiores pelos conceitos de massa e rigidez residuais.

$$H_{mn}(w) = \frac{1}{w^2 M_{mn}^R} \sum_{j=n_1}^{n_2} \frac{F_{mj}F_{nj}}{(p_j^2 - w^2) + i2x_j p_j w} + \frac{1}{K_{mn}^R} \quad (4.8)$$

Nas circunstâncias anteriores, as fases de aplicação do presente método são então:

- estimar por qualquer dos métodos referidos em 4.1 os parâmetros modais dos modos "interiores";
- estimar nas extremidades da gama de frequências os valores das massa e rigidez residual;
- por métodos de 1 g.l. estimar para cada modo intermédio k quais os valores dos parâmetros modais que melhor ajustam os seguintes grandezas (o sobrescrito designa valores experimentais)

$$H_{mn}^k(w) = \bar{H}_{mn}(w) - \left\{ \frac{1}{w^2 M_{mn}^R} \sum_{\substack{j=n_1 \\ j \neq k}}^{n_2} \frac{\Phi_{mj} \Phi_{nj}}{(p_j^2 - w^2) + i2x_j p_j w} + \frac{1}{K_{mn}^R} \right\} \quad (4.9)$$

- repetir as duas fases anteriores até atingir a convergência adequada;

Métodos de *Curve Fit*.

Esta designação engloba toda a classe de métodos em que a determinação dos parâmetros modais se faz através do ajuste da expressão 2.8 (ou equivalente) aos valores experimentais discretos.

Método para Estruturas de Baixo Amortecimento.

Este método, desenvolvido por Ewins, aplica-se com particular sucesso à identificação de parâmetros modais em sistemas com baixo amortecimento tais como algumas estruturas mecânicas ou elementos de construção cujo amortecimento resulta das ligações recíprocas. Com efeito desprezando a contribuição do amortecimento a expressão 2.8 degenera em:

$$H_{mn}(w) = \sum_{k=1}^N \frac{F_{mk}F_{nk}}{-w^2 + p_k^2} \quad (4.10)$$

O faseamento preconizado pelo presente procedimento é então:

- identificação das frequências próprias pela observação dos extremos locais de H_{mn} ;
- dispondo de N valores experimentais de H_{mn} para frequências de excitação W_n ($n=1,2,.. N$), a aplicação sucessiva da expressão 4.10 origina o seguinte sistema linear de equações:

$$\begin{Bmatrix} H_{mn}(W_1) \\ H_{mn}(W_2) \\ \dots \\ H_{mn}(W_N) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} (p_1^2 - W_1^2)^{-1} & (p_2^2 - W_1^2)^{-1} & \dots & (p_N^2 - W_1^2)^{-1} \\ (p_1^2 - W_2^2)^{-1} & (p_2^2 - W_2^2)^{-1} & \dots & (p_N^2 - W_2^2)^{-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (p_1^2 - W_N^2)^{-1} & (p_2^2 - W_N^2)^{-1} & \dots & (p_N^2 - W_N^2)^{-1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_{m1}F_{n1} \\ F_{m2}F_{n2} \\ \dots \\ F_{mN}F_{nN} \end{Bmatrix}$$

ou, matricialmente

$$\mathbf{H}_{mn} = \mathbf{R}\mathbf{A}_{mn} \quad (4.11)$$

cujas soluções conduzem às estimativas A_{mn} do vector dos parâmetros modais.

Este método apresenta, nas aplicações práticas de engenharia civil, os seguintes dois inconvenientes: a) a hipótese de amortecimento nulo parece excessivamente grosseira e b) o método revela-se excessivamente sensível ao critério de fixação das N frequências de

excitação W_n . No sentido de obstar aos inconvenientes referidos os autores preconizam uma adaptação do método a estruturas com amortecimento não desprezável, designado por Método Misto, no qual o ajuste é feito não ao termo genérico H_{mn} mas sim à sua parte real, ou seja:

$$\text{Re}(H_{mn}(w)) = \sum_{k=1}^N \frac{p_k^2 - w^2}{(p_k^2 - w^2) + (2x_k p_k w)^2} F_{mk} F_{nk} \quad (4.12)$$

Apresentam-se nas Figs. 4.2 a) e b) as curvas originais e geradas respectivamente pela aplicação deste método ou da sua variante mista para o elemento (7,7) do exemplo modelo.

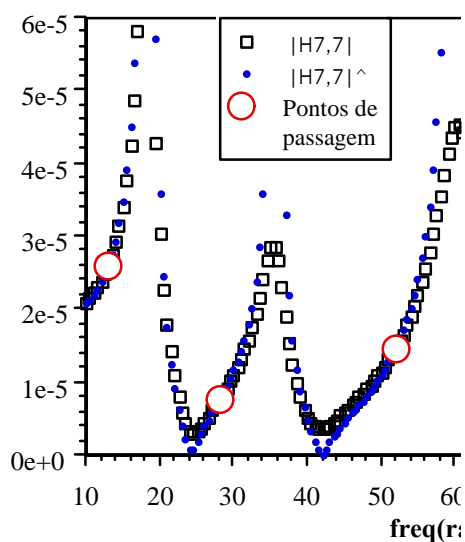


Fig. 4.2 a) Resultados do Método de Ewins

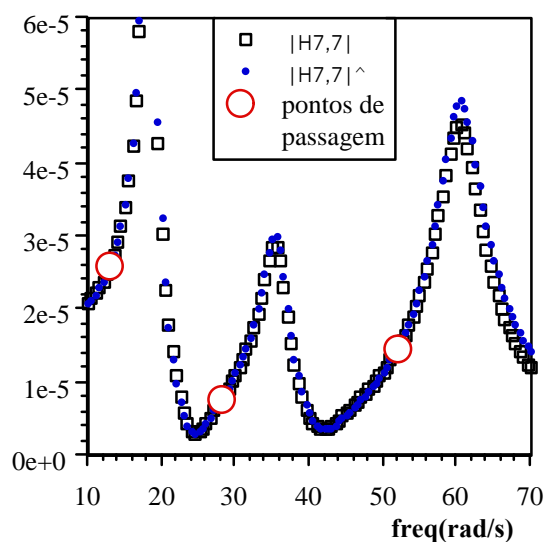


Fig. 4.2 b) Resultados do Método Misto

5. EXEMPLOS DE APLICAÇÃO

O interesse científico e estratégico da identificação dinâmica de sistemas estruturais cedo motivou o desenvolvimento no DECivil do IST de um sistema integrado que permitisse levar a cabo ensaios com os objectivos pretendidos. Este sistema foi desenvolvido em 1988-89, tendo sido enquadrado no equipamento disponível no CMEST - Centro de Mecânica e Engenharia Estruturais da Universidade Técnica de Lisboa. O sistema integrado era, em traços gerais, constituído por diversos acelerómetros uniaxiais, pelos respectivos condicionadores e amplificadores, por uma unidade de aquisição de dados e por um controlador PC. No contexto deste sistema foram ainda desenvolvidos diferentes programas proprietários para a aquisição, processamento e pós-processamento de sinal. O sistema integrado assim constituído foi por repetidas vezes utilizado em actividades de investigação e consultoria do âmbito do CMEST, inicialmente, e mais recentemente, no âmbito do ICIST – Instituto de Engenharia de Estruturas, Território e Construção, do IST.

O Anexo I é constituído por um artigo em revista que descreve numa forma sucinta algumas das aplicações do sistema integrado de identificação dinâmica.

Na actualidade, e face ao considerável desenvolvimento observado nos equipamentos disponíveis, o ICIST encomendou um conjunto de 5 acelerógrafos triaxiais com uma arquitectura de sistema radicalmente diferente da arquitectura até então utilizada. As características mais marcantes destas unidades são as seguintes:

- Tratam-se de unidades autónomas em que a digitalização e armazenamento são feitos internamente.
- Dispõe de sensores triaxiais de aceleração internos com uma gama dinâmica excepcional (>155 dB). Em termos práticos, esta propriedade manifesta-se na amplitude da gama de acelerações que permitem reproduzir com ruído mínimo.
- A conversão analógico-digital é realizada com uma resolução de 18 bits. A este facto acresce a possibilidade de alterar o fim de escala entre 0.25 g e 4g, ao que correspondem 2 bits adicionais.
- Dispõe de receptores de GPS que permitem a sincronia do relógio interno relativamente ao padrão UTC com erro inferior a 5 μ s. Este facto permite a realização de registos praticamente simultâneos nos diversos aparelhos disponíveis.

6. REFERÊNCIAS

- 1 J. M. Proença; 1989; *"IDENTIFICAÇÃO DINÂMICA DE SISTEMAS ESTRUTURAS. Técnicas Experimentais e Analíticas"*; Dissertação submetida para a obtenção do grau de mestre em Engenharia de Estruturas pela Universidade Técnica de Lisboa; IST.
- 2 J. J. R. T Azevedo e J.M.S.F.M. Proença; 1990; "Dinâmica de Estruturas", Disciplina da Licenciatura em Eng^a Civil do IST - *Dinâmica de Estruturas e Engenharia Sísmica*; IST.
- 3 D. J. Ewins; 1986; *Modal Testing: Theory and Practice*; John Wiley and Sons Inc.
- 4 R. T. Duarte; 1987; Apontamentos da Disciplina de Mestrado em Engenharia de Estruturas do IST - *Dinâmica de Estruturas*; IST.
- 5 K. Bathe, E. Wilson, W. Peterson; 1973; *SAPIV - A Structural Analysis Program for Static and Dynamic Response of Linear Systems*; Report EERC 73-111.
- 6 D. E. Newland; 1975; *An Introduction to Random Vibration and Spectral Analysis*; Longman

