



Introdução à Fiabilidade Estrutural

Apontamentos da Disciplina de Dinâmica e Engenharia Sísmica

Mestrado em Engenharia de Estruturas

Instituto Superior Técnico

Luís Guerreiro

Junho de 1999

Introdução à Fiabilidade Estrutural

1 Introdução

A noção que normalmente está associada ao termo fiabilidade tem mais a ver com o comportamento de sistemas mecânicos, ou eléctricos, do que com sistemas estruturais. Assim, por exemplo, é vulgar dizer que determinado automóvel é fiável, ou apresenta grande fiabilidade, porque permite realizar uma elevada quilometragem sem necessitar de qualquer intervenção. Neste contexto a noção de fiabilidade está relacionada com a capacidade de determinado mecanismo, ou sistema eléctrico, desempenhar a função para a qual foi construído durante um longo período, sem se deteriorar significativamente.

Esta noção de fiabilidade não se adapta no entanto a sistemas estruturais. A ruptura de uma estrutura não ocorre normalmente numa situação de serviço, isto é, não ocorre pelo simples facto de ficar submetida continuamente à mesma solicitação, a não ser que ocorra um problema de fadiga de um determinado elemento. Excluindo o caso da ruptura por fadiga, o colapso de uma estrutura está normalmente associado à ocorrência de um valor extraordinariamente elevado da solicitação e/ou ao facto da estrutura apresentar um resistência anormalmente baixa, situações estas que terão uma baixa probabilidade de acontecer.

É pois compreensível que o objectivo da teoria de fiabilidade estrutural seja tratar as incertezas que envolvem o projecto de estruturas de forma a garantir um valor aceitável da sua probabilidade de colapso. Dada a natureza aleatória das variáveis envolvidas no processo de dimensionamento estrutural (intensidade da acção, características resistentes dos materiais, etc.), não é possível garantir que uma estrutura seja absolutamente segura. Será sempre necessário aceitar algum risco.

As incertezas que aparecem num processo de análise de fiabilidade podem ser de três tipos diferentes: incertezas físicas, incertezas estatísticas e incertezas do modelo. O primeiro tipo de incertezas, as físicas, estão relacionadas com o carácter aleatório das grandezas físicas, como a quantificação das acções, as características dos materiais, as dimensões das peças, etc.. Estas grandezas podem ser expressas através de processos estocásticos, e os seus valores só podem ser obtidos através da análise de informação recolhida. No entanto, na maioria dos casos, a quantidade de informação que é possível obter não é suficiente para uma boa definição dos modelos estatísticos, o que dá origem ao segundo tipo de incertezas, as incertezas estatísticas. Por último, as incertezas do modelo estão relacionadas com a necessidade de criar modelos matemáticos para simular a realidade, modelos estes que estão inevitavelmente sujeitos a diversos tipos de simplificações.

2 O Problema Fundamental

De uma forma geral, a análise da fiabilidade de um sistema estrutural é um problema complexo e que envolve um grande número de variáveis. Estas variáveis dividem-se essencialmente em dois grupos: aquelas que definem a acção e aquelas que definem a capacidade resistente da estrutura. Nalguns casos simples este problema pode ser

estudado recorrendo somente a duas variáveis, uma de cada um dos tipos atrás definidos. Como o objectivo deste texto é fazer a apresentação do problema fundamental da análise de fiabilidade, será considerado um dos casos de análise mais simples, ou seja, um problema somente com duas variáveis aleatórias:

- Valor da acção (A);
- Valor da resistência (R).

Estas duas variáveis não serão, em princípio, directamente comparáveis. Imagine-se, por exemplo, o caso em que a variável A representa a carga distribuída sobre uma viga e a variável R representa o momento resistente da secção de meio vão. A comparação entre as duas grandezas não pode ser feita directamente. Este problema pode ser resolvido se se definir uma nova variável E_a , que traduz o efeito da acção. Assim, no exemplo atrás mencionado, a variável E_a poderia representar o momento a meio vão da viga provocado pela carga distribuída ao longo do vão. Esta grandeza já poderia ser comparada directamente com a variável R. Esta passagem que levou a transformar a variável acção no seu efeito também poderia ter sido imaginada no sentido inverso, ou seja, considerar uma variável A_r , que representasse o valor da acção correspondente ao valor do momento resistente, e assim a comparação entre variáveis seria feita no domínio da acção.

Adoptando uma transformação do primeiro tipo, ou seja transformando a variável acção (A) na variável que traduz o seu efeito (E_a), o problema fundamental da fiabilidade consiste em quantificar qual é a probabilidade da variável aleatória R ser inferior à variável E_a . Esta probabilidade traduz a probabilidade de ruína do sistema estrutural.

Se se admitir que $f_{E_a}(a)$ e $f_R(r)$ são as funções de densidade de probabilidade das variáveis aleatórias E_a e R (Figura 1), e que estas são independentes, então a probabilidade de ruína pode ser calculada através da seguinte expressão:

$$P_r = P(R \leq E_a) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^a f_{E_a}(a) f_R(r) dr da \quad (1)$$

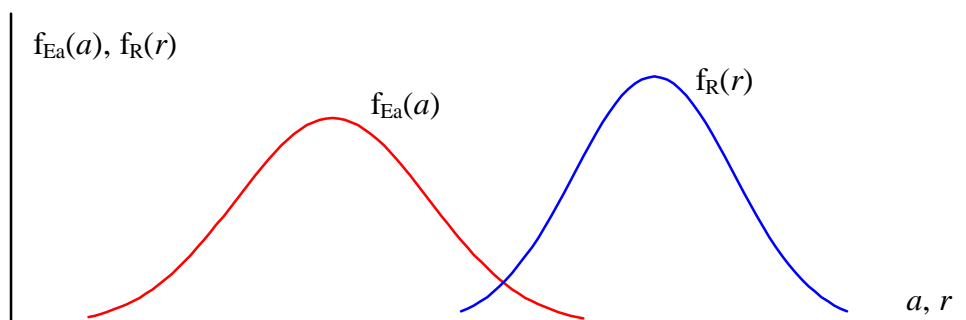


Figura 1- Funções de densidade de probabilidade.

Se se considerar a função de distribuição de probabilidade da variável resistência $F_R(x)$, a equação (1) pode ser escrita da seguinte forma (Figura 2):

$$P_r = P(R \leq E_a) = \int_0^+ f_{Ea}(x) F_R(x) dx \quad (2)$$

com,

$$F_R(x) = P(R < x) = \int_0^x f_R(r) dr \quad (3)$$

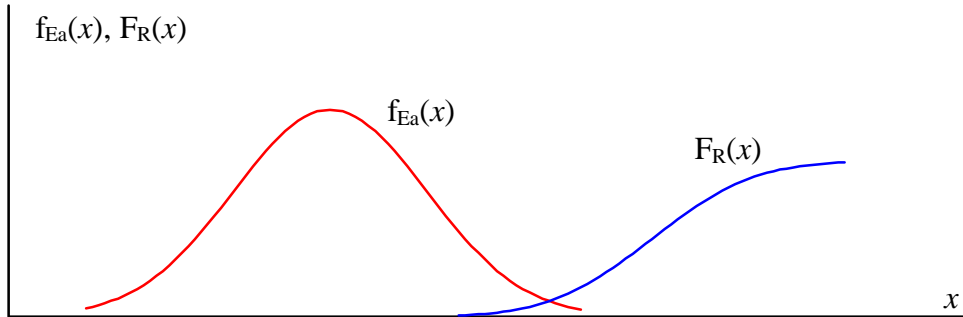


Figura 2 – Calculo da probabilidade de ruína [$f_{Ea}(x)$ e $F_R(x)$].

A probabilidade de ruína também pode ser calculada utilizando a função de distribuição de probabilidade do efeito da acção, $F_{Ea}(x)$. Neste caso particular a equação para o calculo da probabilidade de ruína tem um aspecto ligeiramente diferente da definida em (2), pois não pode esquecer-se que a função $F_{Ea}(x)$ define a probabilidade do efeito da acção ser inferior a um dado valor x , e neste caso o que importa é a probabilidade do efeito da acção ultrapassar um determinado nível (Figura 3).

$$P_r = P(R \leq E_a) = \int_0^+ (1 - F_{Ea}(x)) f_R(x) dx \quad (4)$$

com,

$$F_{Ea}(x) = P(E_a < x) = \int_0^x f_{Ea}(r) dr \quad (5)$$

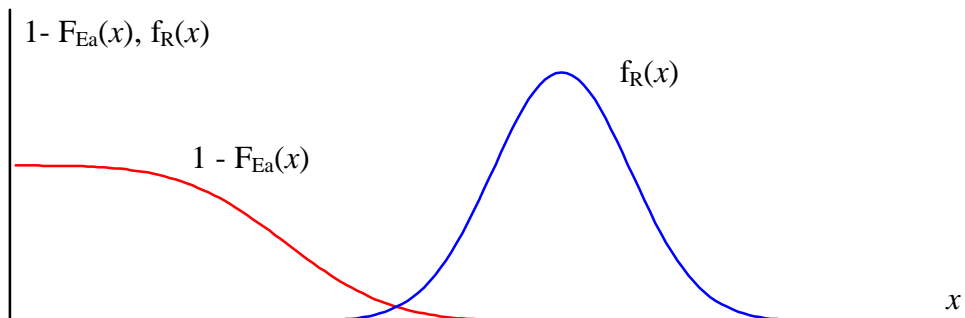


Figura 3 – Calculo da probabilidade de ruína [$1 - F_{Ea}(x)$, $f_R(x)$].

3 Níveis de fiabilidade

A forma como foi apresentado o problema fundamental da fiabilidade estrutural, ou, por outras palavras, a forma indicada para o cálculo da probabilidade de ruína, corresponde aquilo que foi designado por alguns autores (Ferry Borges, 1985), uma análise de fiabilidade de Nível 3. Segundo esta classificação o problema da análise da fiabilidade pode ser estabelecido a três diferentes níveis, consoante o grau de sofisticação da análise:

Nível 3 (Probabilístico exacto) – Este nível corresponde ao cálculo exacto dos integrais que definem a probabilidade de ruína do sistema estrutural.

Nível 2 (Probabilístico aproximado) – Corresponde ao cálculo aproximado das probabilidades de ruína através da utilização do conceito de Índice de Fiabilidade.

Nível 1 (Semi-probabilístico) – Corresponde à utilização de algoritmos de dimensionamento relacionados de forma pouco definida com a probabilidade de ruína. Utilização de coeficientes de segurança relacionados com factores de segurança e tolerâncias na definição dos valores característicos.

A análise de fiabilidade de nível 3 já foi referida na secção anterior pelo que nesta secção só serão referidas as análises de nível 2 e 1.

Para realizar o cálculo da probabilidade de ruína através duma análise de nível 2 é necessário primeiro definir o conceito de Índice de Fiabilidade.

Se as variáveis R e E_a , que representam respectivamente a resistência e o efeito da acção numa análise a duas variáveis forem aleatórias, então também será aleatória a variável diferença, ou seja a variável $(R-E_a)$. Esta variável terá as seguintes propriedades:

$$\text{Média } (R-E_a) = \text{Média } (R) - \text{Média } (E_a) \quad (6)$$

$$\sigma_{(R-E_a)} = \sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_{E_a}^2} \quad (7)$$

Na figura 4 está representada esquematicamente a função de densidade de probabilidade da variável $(R-E_a)$. Neste diagrama as situações que correspondem à ruptura do sistema estrutural são as que estão associadas aos valores negativos da variável aleatória. A área do diagrama correspondente aos valores negativos da variável corresponde ao valor da probabilidade de ruína do sistema estrutural (área a sombreado).

Define-se Índice de Fiabilidade (b) como a relação entre o valor médio da variável diferença e o seu desvio padrão:

$$b = \frac{\text{Média } (R - E_a)}{\sigma_{(R - E_a)}} \quad (8)$$

Este coeficiente também pode ser interpretado como uma medida da distância entre o valor médio da função de densidade de probabilidade da variável $(R-E_a)$ e a origem, indicada em número de desvios padrão. Quanto mais baixo for o índice de fiabilidade maior é a probabilidade de ruína.

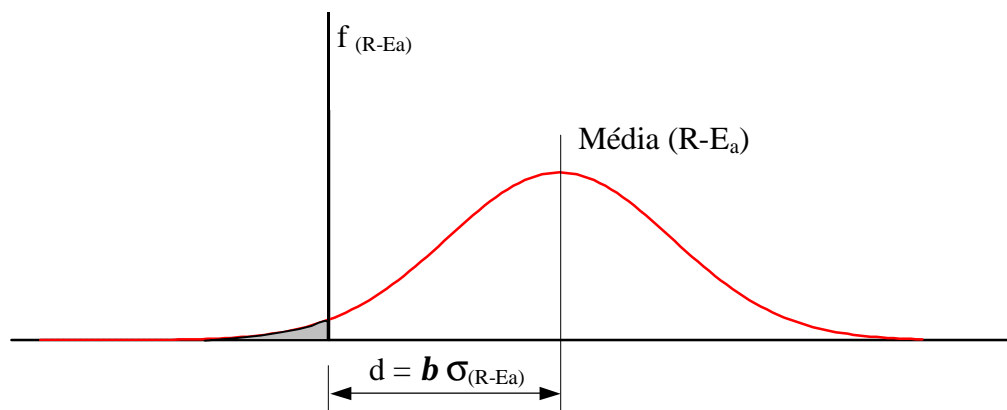


Figura 4 – Definição de Índice de Fiabilidade (**b**).

O nível 1 da análise de fiabilidade corresponde ao formato utilizado na verificação de segurança pela actual regulamentação, nomeadamente o regulamento nacional (RSA, 1983) ou a regulamentação europeia, os Eurocódigos. Neste abordagem a verificação da segurança é realizada através da seguinte comparação:

$$\frac{1}{\gamma_n} E_a (\gamma_{Sd}, \gamma_f, \psi, F_r) < R (f_k, \gamma_m, \gamma_{Rd}) \quad (9)$$

ou

$$E_a (\gamma_{Sd}, \gamma_f, \psi, F_r) < \gamma_n R (f_k, \gamma_m, \gamma_{Rd}) \quad (10)$$

em que:

- F_r - valor de referência da acção. Normalmente é considerado um valor cuja probabilidade de ser ultrapassado é de 5%.
- γ_f - coeficiente parcial de segurança considerado para ter em conta possíveis desvios desfavoráveis da acção em relação ao seu valor de referência, ou para cobrir incertezas na definição do modelo da acção. O produto do coeficiente parcial de segurança γ_f pelo valor de referência F_r designa-se por valor de projecto ($F_d = \gamma_f F_r$)
- ψ - coeficiente de combinação utilizado para ter em conta a reduzida probabilidade de actuação simultânea de todas as acções no seu valor de projecto.
- f_k - valor característico da resistência. Na definição deste valor é habitualmente utilizado o valor cuja probabilidade de ser excedido é de 95%.
- γ_m - coeficiente parcial de segurança para o material. Este coeficiente pretende contabilizar a possibilidade de haver desvios desfavoráveis do valor da resistência em relação ao seu valor característico, incertezas nas propriedades dos materiais utilizados face às propriedades medidas em provetes de teste, etc..
- γ_{Sd}, γ_{Rd} - coeficientes parciais de segurança relacionados com as incertezas do modelo, que poderão não estar contabilizadas nos outros coeficientes de segurança. Poderão também ser usados para cobrir uma maior sensibilidade do sistema estrutural a um aumento do valor da acção de dimensionamento. Por vezes na regulamentação só aparece um destes coeficientes de segurança.

- γ_n - as consequências da ruína do sistema podem ser tidas em conta através de um ou mais coeficientes γ_n (CEB, 1988). Por vezes este coeficiente não aparece explicitamente, estando incluindo no valor de γ_f ou γ_m .

Na verificação de segurança a este nível a natureza aleatória do problema só é contabilizada através da quantificação do valor característico da resistência e do valor de referência da acção.

4 Modelação da acção

A acção, com a excepção do peso próprio, é normalmente variável no tempo, sendo portanto adequado considerá-la como um processo estocástico (Thoft-Christensen, 1989). No entanto, não é tanto a distribuição dos valores da acção que interessa quantificar mas sim a distribuição dos seu valores máximos durante o período de referência considerado. Desta forma, os tipos de distribuição mais adequados à modelação das acções são as distribuições de extremos e em particular as de máximos. De entre as distribuições de extremos conhecidas, as mais divulgadas são as de Gumbel (Ferry Borges, 1985). Gumbel classifica as distribuições de extremos em três tipos, sendo umas de máximos e outras de mínimos. Aqui são referidas somente as distribuições de máximos.

- a) Distribuição de extremos tipo I (máximos)

$$F_I(x) = \exp(-\exp(-\alpha(x-u))) \quad \alpha > 0 \quad (11)$$

$$\text{média} = u + \frac{\gamma}{\alpha} \quad (\gamma \text{ é a constante de Euler } \gamma = 0.57722)$$

- b) Distribuição de extremos tipo II (máximos)

$$F_{II}(x) = \exp(-(kx)^{-\beta}) \quad \beta > 0; \quad x \geq 0; \quad k > 0 \quad (12)$$

- c) Distribuição de extremos tipo III (máximos) – Distribuição de Weibull

$$F_{III}(x) = \exp(-(\frac{x}{k})^\beta) \quad \beta > 0; \quad x \geq 0; \quad k > 0 \quad (13)$$

5 Modelação da resistência

Com base no teorema do limite central, e tendo em conta que a variável resistência, numa forma geral, é uma função linear dum determinado numero de variáveis aleatórias independentes, conclui-se ser adequada à sua modelação a distribuição normal. No entanto a função de distribuição normal admite valores negativos da resistência, pois o seu domínio se estende de $-\infty$ a $+\infty$. Para evitar esse problema recorre-se muitas das vezes à distribuição log-normal. Esta distribuição pode ser obtida a partir da distribuição normal, substituindo a variável aleatória X , considerada na distribuição normal, pela variável $Y = \ln X$.

a) Distribuição normal

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{x - m_x}{\sigma} \right)^2 \right] \quad (13)$$

m_x – média

σ – desvio padrão

b) Distribuição log-normal

$$f(x) = \frac{1}{x \delta \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\ln(x/\beta)}{\delta} \right)^2 \right] \quad (14)$$

$$m_x = \beta \exp(-\delta^2) \quad (\text{média})$$

$$\sigma = \beta \sqrt{\exp(\delta^2) [\exp(\delta^2) - 1]} \quad (\text{desvio padrão})$$

6 Função de Vulnerabilidade

Como foi referido na secção 2, para calcular a probabilidade de ruína em geral não é possível comparar directamente o valor da acção com o valor da variável resistência. Para fazer a comparação é necessário transformar a variável acção na variável efeito da acção, ou, de forma inversa, transformar o valor da resistência no correspondente valor da variável representativa da acção.

Para realizar estas transformações entre o campo das variáveis da acção e o campo dos seus efeitos é necessário conhecer a aplicação que, traduzindo a resposta da estrutura, permite relacionar estas duas variáveis. Esta aplicação é conhecida pela designação de Função de Vulnerabilidade (V) e representa, para cada valor da variável acção o correspondente valor da resposta, medida na variável escolhida para o efeito. Assim, pode ter-se uma função de vulnerabilidade que permite calcular o valor do corte basal numa estrutura quando solicitada por uma série de acelerações na base, ou uma outra que represente o momento a meio vão numa viga em função do valor da carga distribuída no vão, etc.. Consoante o tipo de comportamento admitido para estrutura poderá ter-se funções de vulnerabilidade lineares ou não lineares. No caso de se admitir que a estrutura responde em regime elástico linear a uma determinada solicitação, a função de vulnerabilidade é traduzida por uma recta, e a transformação entre a variável acção e a variável que mede o seu efeito é uma transformação linear.

Dum modo geral, as situações que condicionam a ruptura correspondem a estados limites onde o comportamento desta já não é linear. Assim na maioria dos casos a função de vulnerabilidade é uma função não linear.

Para a determinação da função de vulnerabilidade é necessário estudar o comportamento da estrutura para diversos níveis da intensidade da acção e medir as correspondentes respostas através da variável que se pretende utilizar para medir o efeito da acção. Conhecendo esta função torna-se fácil fazer a passagem entre os dois

campos intervenientes na análise de fiabilidade: o campo das variáveis que medem a acção e o campo das correspondentes variáveis da resposta (Figura 5).

$$E_a = V(A) \quad (15)$$

$$A_r = V^{-1}(R) = G(R) \quad (16)$$

Em que:

E_a – efeito da acção correspondente ao valor A da acção

A_r – valor que a acção tem que ter para que a resposta seja R

V – Função de Vulnerabilidade

G – Inversa da Função de Vulnerabilidade

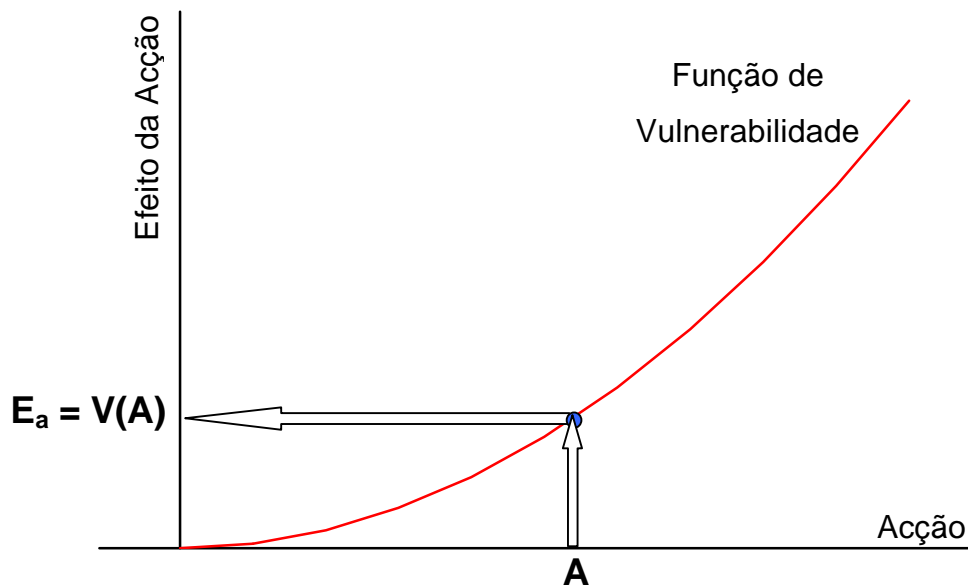


Figura 5 – Função de Vulnerabilidade.

Como foi referido anteriormente, para calcular a probabilidade de ruína dum sistema estrutural é necessário conhecer as funções de densidade de probabilidade (ou as funções de distribuição) das variáveis envolvidas no processo. Se o cálculo da probabilidade de ruína for efectuado no campo das grandezas que medem o efeito da acção, é necessário conhecer as distribuições estatísticas de ambas as variáveis referidas a essas grandezas. Como o mais natural é conhecer a distribuição estatística da variável que representa acção, esta distribuição tem que ser transformada na correspondente distribuição do seu efeito. Esta transformação entre funções estatísticas também deverá ser feita através da função de vulnerabilidade.

Considere-se $f_A(A)$ a função de densidade de probabilidade da acção e $V(A)$ a função de vulnerabilidade que traduz o comportamento da estrutura em análise. A probabilidade da acção estar contida num intervalo de largura dA pode ser calculada através de $f_A(A)dA$.

Recordando a definição de função de vulnerabilidade, e da sua inversa, pode-se escrever:

$$E_a = V(A) \tag{15}$$

$$A = G(E_a) \quad (\text{porque } G = V^{-1}) \tag{17}$$

logo,

$$\frac{dA}{dE_a} = \frac{dG(E_a)}{dE_a} = G'(E_a) \quad dA = G'(E_a) dE_a \tag{18}$$

o que conduz a,

$$f_A(A) dA = f_A[G(E_a)] dA = f_A[G(E_a)] G'(E_a) dE_a \tag{19}$$

Se se considerar como $f_{E_a}(E_a)$ a função de densidade de probabilidade da variável efeito da acção, então a expressão (19) pode ser escrita da seguinte forma:

$$f_A(A) dA = f_{E_a}(E_a) dE_a \tag{20}$$

com

$$f_{E_a}(E_a) = f_A[G(E_a)] G'(E_a) \tag{21}$$

A equação (21) traduz a relação entre as funções de distribuição de probabilidade da acção e do efeito da acção (Figura 6).

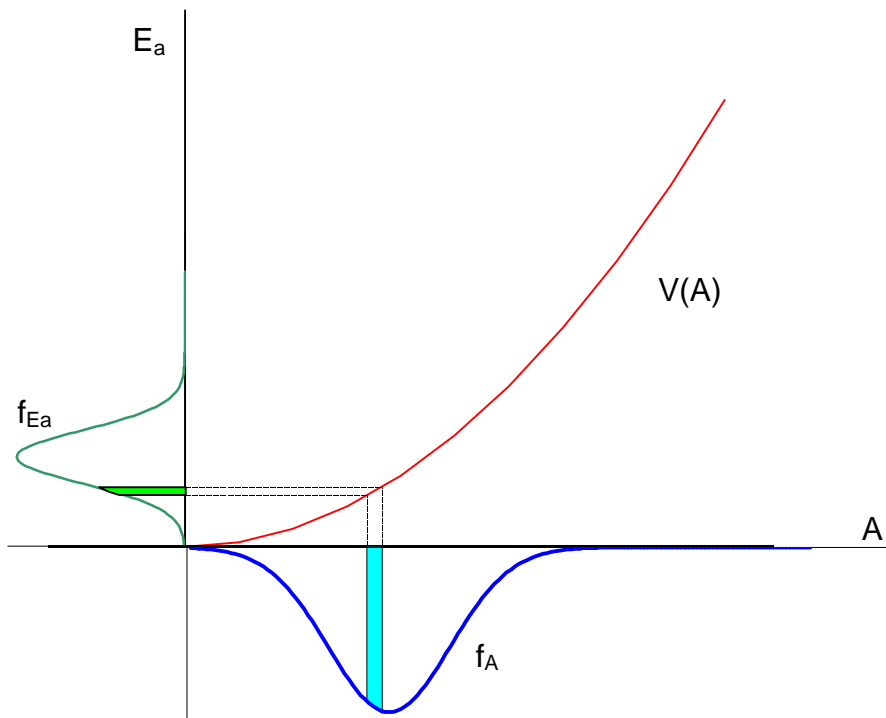


Figura 6 – Relação entre funções de densidade de probabilidade.

Se o objectivo for converter a função de distribuição de probabilidade da acção na função distribuição de probabilidade do efeito da acção, então tem que ser considerada a seguinte transformação:

$$P(A < A_0) = \int_{-\infty}^{A_0} f_A(A) dA = \int_{-\infty}^{E_{a0}=V(A_0)} f_A[G(E_a)] G(E_a) dE_a = \int_{-\infty}^{V(A_0)} f_{Ea}(Ea) dEa \quad (22)$$

$$P(A < A_0) = P(E_a < V(A_0)) \quad (23)$$

A equação (23) traduz a relação entre as funções de distribuição de probabilidade da variável acção e da variável efeito da acção.

7 Bibliografia

- Ferry Borges, J. e Castanheta, M., 1985 – “Structural Safety”, Curso 101, LNEC.
- Thoft-Christensen, P., 1989 – “Fundamentals of Structural Reliability”, ISPRA Courses. Structural Reliability.
- CEB, 1988 – “General Principles on Reliability for Structures”, Bulletin d’Information nº 191.
- RSA, 1983 – “Regulamento de Solicitações e Acções em Edifícios e Pontes”.