



Osciladores lineares contínuos

Apontamentos da Disciplina de Dinâmica e Engenharia Sísmica

Mestrado em Engenharia de Estruturas

Instituto Superior Técnico

Luís Guerreiro

Março de 1999

Osciladores lineares contínuos

1. Introdução

A análise dinâmica de estruturas é normalmente realizada com base em modelos discretos. Estes modelos, que apresentam a grande vantagem de permitir realizar a análise com base num número limitado de variáveis, conduzem sempre a soluções aproximadas por mais refinado que o modelo seja, pois estaremos sempre a representar uma realidade contínua através coordenadas discretas.

Uma alternativa possível é a representação da realidade através de modelos com infinitos graus de liberdade ou seja através de modelos contínuos. A formulação necessária à análise de modelos contínuos pode ser obtida a partir do estabelecimento das equações de equilíbrio duma porção infinitesimal do oscilador. Desta forma são estabelecidas as equações diferenciais de equilíbrio, através das quais se podem obter as frequências e as configurações modais dos infinitos modos de vibração do oscilador.

Nesta secção são analisados essencialmente três problemas: a vibração longitudinal de barras; a vibração transversal de barras e a vibração de lajes.

2. Vibração longitudinal de barras

Considere-se uma barra com alinhamento recto, de secção $A(x)$, densidade de massa ρ e módulo de elasticidade E . Se se admitir que N é o esforço axial que actua uma secção transversal genérica da barra recta e que u representa o deslocamento dessa secção ao longo do alinhamento da barra, então pode-se estabelecer a equação de equilíbrio de forças segundo este alinhamento. Na figura 1 estão representadas as forças envolvidas no equilíbrio duma porção infinitesimal da barra.

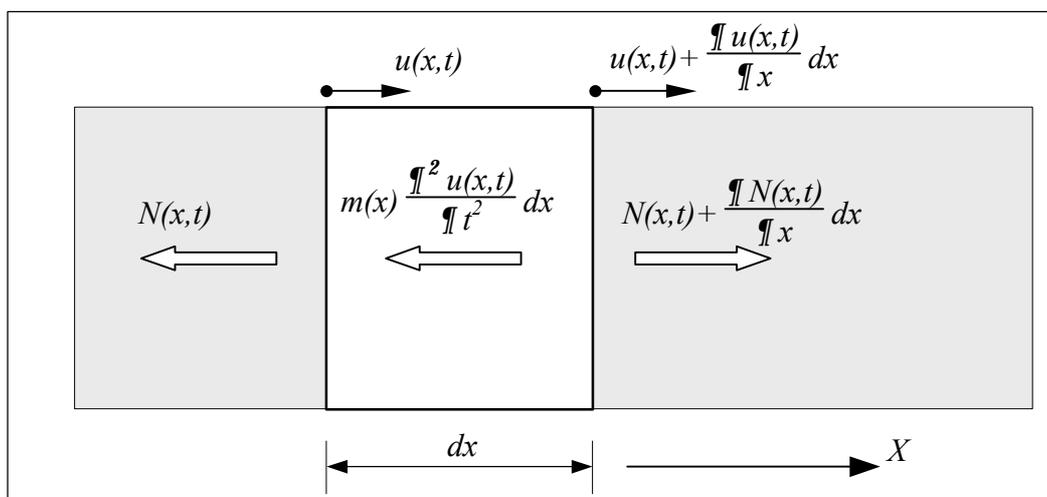


Figura 1 – Equilíbrio de um elemento infinitesimal de barra.

$$- N(x,t) - m(x) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} dx + N(x,t) + \frac{\partial N(x,t)}{\partial x} dx = 0 \quad (1)$$

- $u(x,t)$ - deslocamento ao longo do eixo X;
 $N(x,t)$ - esforço axial;
 $m(x)$ - massa na secção x [$m(x) = \rho A(x)$];
 $m(x) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}$ - força de inércia.

Simplificando a equação e introduzindo a relação força-deformação expressa na equação (2) obtém-se uma nova representação da equação de equilíbrio.

$$N(x,t) = E A(x) \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \quad (2)$$

$$\frac{\partial N(x,t)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} [EA(x) \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}] \quad (3)$$

$$- m(x) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial x} [EA(x) \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}] = 0 \quad (4)$$

Uma forma simples de resolução da equação de equilíbrio (4) e que permite determinar as frequências e os modos de vibração, passa pela separação da variável $u(x,t)$ em duas componentes, representando uma delas a configuração deformada e a outra a variação no tempo que se admite harmónica.

$$u(x,t) = \bar{u}(x) Y(t) \quad (5)$$

$$Y(t) = \text{sen}(p t) \quad (6)$$

$$\dot{Y}(t) = p \cos(p t) \quad (7)$$

$$\ddot{Y}(t) = -p^2 \text{sen}(p t) = -p^2 Y(t) \quad (8)$$

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \bar{u}(x) \ddot{Y}(t) = -\bar{u}(x) p^2 Y(t) \quad (9)$$

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = \bar{u}'(x) Y(t) \quad (10)$$

$$m(x) \bar{u}(x) p^2 Y(t) + \frac{\partial}{\partial x} [EA(x) \bar{u}'(x) Y(t)] = 0 \quad (11)$$

Se se resumir o problema à análise da vibração longitudinal de barras uniformes (barras com densidade e características mecânicas constantes ao longo do eixo) e com secção transversal constante, então a equação (11) toma a seguinte forma:

$$m \bar{u}(x) p^2 Y(t) + EA \bar{u}''(x) Y(t) = 0 \quad (12)$$

Eliminando a variável $Y(t)$ da equação (12) obtem-se uma nova equação, só dependente da variável que representa a configuração deformada da estrutura.

$$m \bar{u}(x) p^2 + EA \bar{u}''(x) = 0 \quad (13)$$

$$\bar{u}''(x) + \frac{m p^2}{EA} \bar{u}(x) = 0 \quad (14)$$

Se tivermos em consideração que a velocidade de propagação de ondas elásticas em barras uniformes é traduzida pela equação (15) [Clough e Penzien, 1993], pode-se escrever a equação (14) em função deste novo parâmetro.

$$c_0 = \sqrt{\frac{EA}{m}} \quad (15)$$

$$\bar{u}''(x) + \left(\frac{p}{c_0}\right)^2 \bar{u}(x) = 0 \quad (16)$$

Esta equação traduz um problema de valores e vectores próprios com a seguinte solução geral:

$$\bar{u}(x) = A \operatorname{sen}\left(\frac{p}{c_0} x\right) + B \cos\left(\frac{p}{c_0} x\right) \quad (17)$$

Na equação (17) as constantes A e B dependem das condições de fronteira. A título de exemplo começemos por resolver o problema em que ambas as extremidades são fixas. Posteriormente serão abordadas outras situações mas de forma abreviada.

Barra com ambas extremidades fixas

Condições de fronteira para ambas extremidades fixas:

$$1) \bar{u}(0) = 0$$

$$2) \bar{u}(L) = 0$$

$$\text{Solução geral: } \bar{u}(x) = A \operatorname{sen}\left(\frac{p}{c_0} x\right) + B \cos\left(\frac{p}{c_0} x\right)$$

Substituindo nas condições de fronteira:

$$1) \bar{u}(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad B = 0$$

$$2) \bar{u}(L) = 0 \quad \Rightarrow \quad A = 0 \vee \operatorname{sen}\left(\frac{p}{c_0} L\right) = 0$$

Se A e B forem simultaneamente nulos seremos conduzidos à solução trivial, pelo que interessa reter a condição que anula a função seno, ou seja:

$$\frac{p}{c_0} L = n \pi \quad \Rightarrow \quad \frac{p}{c_0} = \frac{n \pi}{L}$$

A solução terá então a seguinte forma:

$$\bar{u}(x) = A \operatorname{sen}\left(\frac{n \pi}{L} x\right)$$

A equação solução obtida representa o conjunto de modos de vibração longitudinais de uma barra uniforme com alinhamento recto e com ambas as extremidades fixas. Como acontece sempre que se resolve um problema de valores e vectores próprios, as configurações do modos (vectores próprios) estão definidos a menos de uma constante. Esta constante pode ser definida através de uma qualquer condição imposta como por exemplo definir que a máxima amplitude deve ter valor unitário. À semelhança do que se faz frequentemente quando se trabalha com sistemas discretos, também nos sistemas contínuos é possível normalizar os modos de vibração em relação à massa. Neste caso a expressão a utilizar tomará a seguinte forma:

$$\int_0^L m [z(x)]^2 dx = 1 \tag{18}$$

$z(x)$ – configuração normalizada dos modos

Aplicando esta regra de normalização ao modos de vibração representados através da solução indicada, obtem-se a seguinte representação modal:

$$z(x) = \sqrt{\frac{2}{mL}} \operatorname{sen}\left(\frac{n \pi}{L} x\right) \tag{19}$$

No Quadro 1 estão indicadas, além da equação característica que representa o problema das vibrações longitudinais de barras uniformes de secção constante, as soluções para várias condições de apoio.

É possível demonstrar que os modos de vibração obtidos apresentam relações de ortogonalidade equivalentes às apresentadas pelos modos de vibração em modelos discretos. Para o caso dos osciladores contínuos a condição de ortogonalidade em relação à massa é representada através da seguinte expressão:

$$\int_0^L m \bar{u}_n(x) \bar{u}_m(x) dx = 0 \quad m \neq n \tag{20}$$

Recorrendo ao teorema de reciprocidade de Betti pode-se afirmar que o trabalho das forças de inércia f_{in} , calculadas com base no modo n , na deformação correspondente ao modo m é igual ao trabalho das forças de inércia f_{im} na deformação do modo n :

$$\int_0^L f_{in}(x,t) u_m(x,t) dx = \int_0^L f_{im}(x,t) u_n(x,t) dx \tag{21}$$

$$f_{in}(x,t) = m(x) \frac{\partial^2 u_n(x,t)}{\partial t^2} \quad (\text{força de inércia}) \tag{22}$$

$$u_n(x,t) = \bar{u}_n(x) Y_n(t) \quad (\text{com } Y_n(t) = A_n \operatorname{sen}(p_n t)) \tag{23}$$

Substituindo na equação (21) a definição de força de inércia traduzida pela relação (22) e fazendo a separação de variáveis indicada em (23), temos:

$$Y_n(t) Y_m(t) p_n^2 \int_0^L \bar{u}_n(x) \bar{u}_m(x) dx = Y_n(t) Y_m(t) p_m^2 \int_0^L \bar{u}_n(x) \bar{u}_m(x) dx \quad (24)$$

Eliminando a variável dependente do tempo e agrupando os termos da equação de outro modo, obtém-se:

$$(p_n^2 - p_m^2) \int_0^L \bar{u}_n(x) \bar{u}_m(x) dx = 0 \quad (25)$$

Como, para modos diferentes temos frequências diferentes, para que a igualdade se verifique é necessário que o integral indicado se anule. Desta forma se traduz a condição de ortogonalidade dos modos de vibração em relação à massa.

No caso do integral atrás indicado envolver o mesmo modo, ou seja, na hipótese de m ser igual a n , então define-se a seguinte grandeza:

$$\int_0^L \bar{u}_n(x) \bar{u}_n(x) dx = M_n \quad (26)$$

Existe também, à semelhança do que acontece com osciladores discretos, ou descontínuos, uma segunda condição de ortogonalidade, envolvendo a rigidez da estrutura. Começemos por considerar a equação de equilíbrio dinâmico representada em (4).

$$-m(x) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left[EA(x) \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right] = 0 \quad (4)$$

Se se considerar apenas a contribuição do modo de vibração n , a equação atrás indicada pode ser apresentada na seguinte forma:

$$-m(x) \frac{\partial^2 \bar{u}_n(x,t)}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left[EA(x) \frac{\partial \bar{u}_n(x,t)}{\partial x} \right] = 0 \quad (27)$$

Fazendo a alteração de variáveis indicada em (23) e eliminando a variável que depende do tempo, temos:

$$p_n^2 m(x) \bar{u}_n(x) + \frac{d}{dx} \left[EA(x) \frac{d \bar{u}_n(x)}{dx} \right] = 0 \quad (28)$$

Multiplicando toda a equação pela configuração do modo m , e integrando ao longo do comprimento da barra obtém-se:

$$\int_0^L p_n^2 \bar{u}_m(x) m(x) \bar{u}_n(x) dx + \int_0^L \bar{u}_m(x) \frac{d}{dx} \left[EA(x) \frac{d \bar{u}_n(x)}{dx} \right] dx = 0 \quad (29)$$

Como devido à propriedade de ortogonalidade dos modos de vibração em relação à massa o primeiro termo da equação é nulo, resta a seguinte igualdade que traduz a segunda condição de ortogonalidade:

$$\int_0^L \bar{u}_m(x) \frac{d}{dx} \left[EA(x) \frac{du_n(x)}{dx} \right] dx = 0 \quad \text{se } m \neq n \quad (30)$$

Em geral não é esta a forma de apresentar esta condição de ortogonalidade. A equação normalmente utilizada para exprimir esta condição pode ser obtida a partir da equação (30) fazendo uma integração por partes:

$$\begin{aligned} \int_0^L \bar{u}_m(x) \frac{d}{dx} \left[EA(x) \frac{du_n(x)}{dx} \right] dx &= \\ &= \bar{u}_m(x) EA(x) \frac{du_n(x)}{dx} \Big|_0^L - \int_0^L \frac{d\bar{u}_m(x)}{dx} EA(x) \frac{du_n(x)}{dx} dx = 0 \end{aligned} \quad (31)$$

Recordemos que:

$$EA(x) \frac{du_n(x)}{dx} = N_n(x) \quad (32)$$

Assim, recorrendo a esta igualdade a equação (31) pode ser simplificada:

$$\bar{u}_m(x) N_n(x) \Big|_0^L - \int_0^L \frac{d\bar{u}_m(x)}{dx} EA(x) \frac{du_n(x)}{dx} dx = 0 \quad (33)$$

Note-se que na maioria dos problemas estudados as condições de fronteira são de tal forma que o produto representado na primeira parcela da equação (33) é nulo. Deste modo a condição de ortogonalidade pode ser apresentada na sua forma mais corrente, que se indica de seguida:

$$\int_0^L EA \bar{u}'_n(x) \bar{u}'_m(x) dx = 0 \quad m \neq n \quad (34)$$

A partir da equação (29) e se considerarmos dois modos iguais, ou seja m igual a n , obtém-se a seguinte igualdade:

$$\int_0^L EA \bar{u}'_n(x) \bar{u}'_n(x) dx = -p_n^2 M_n \quad (35)$$

Se representarmos as configurações modais $z(x)$ normalizadas em relação à massa, de acordo com a expressão (18), então esta expressão pode ser simplificada:

$$\int_0^L EA [z'_n(x)]^2 dx = p_n^2 \quad (36)$$

Existem outros problemas de vibração de barras cujo movimento é regido por equações semelhantes aquela que se obteve neste caso (16). Nestas situações as soluções serão semelhantes às apresentadas para o problema das vibrações longitudinais. Um dos casos em que se verifica esta semelhança é no estudo da vibração transversal duma barra apenas com deformabilidade por corte.

Considere-se uma barra caracterizada por uma secção transversal A , massa m , módulo de distorção G e área de corte A' . Sendo $u(x,t)$ o deslocamento transversal da barra obtem-se a seguinte equação de equilíbrio para forças transversais à barra (V):

$$- m(x) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left[GA'(x) \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right] = 0 \quad (37)$$

Admitindo a separação da variável $u(x,t)$ em duas componentes à semelhança do que se fez anteriormente, serão válidas as relações expressas nas equações (5) a (10) e a equação de equilíbrio pode tomar a seguinte forma:

$$m \bar{u}(x) p^2 + GA' \bar{u}''(x) = 0 \quad (38)$$

Também aqui se pode fazer referência à velocidade de propagação de ondas elásticas (transversais neste caso), cuja equação é apresentada em (39). Assim a equação de equilíbrio reduz-se à forma expressa pela equação (40) e que é idêntica à equação obtida para o estudo das vibrações longitudinais (16).

$$c_0 = \sqrt{\frac{GA'}{m}} \quad (39)$$

$$\bar{u}''(x) + \left(\frac{p}{c_0}\right)^2 \bar{u}(x) = 0 \quad (40)$$

Um exemplo de um fenómeno que pode ser simulada através duma barra uniforme com deformabilidade apenas de corte é a vibração horizontal de uma coluna de solo brando assente sobre uma camada de rocha ou de solo muito rígido. Neste caso as condições de fronteira a considerar seriam as de apoio fixo numa extremidade (extremidade de contacto com a rocha) e de livre na outra extremidade.

De acordo com as soluções apresentadas no Quadro 1, as frequências próprias seriam traduzidas pela seguinte expressão:

$$p_n = \frac{(2n-1)\pi c_0}{2L} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (41)$$

Através desta forma é possível obter para o período fundamental de vibração duma coluna de solo com a altura L e velocidade de propagação das ondas de c_0 um valor de:

$$T = \frac{4L}{c_0} \quad (42)$$

Este resultado é por vezes utilizado para calcular a ordem de grandeza do período de vibração duma coluna de solo nas condições apontadas [Duarte,1983].

Outro problema que conduz a uma equação semelhante à equação (16) é o problema da análise de vibrações transversais duma corda vibrante. Se considerarmos uma corda com massa m (por unidade de comprimento) e admitirmos que a sua tensão se mantém constante ao longo do seu comprimento (hipótese válida se as amplitudes de vibração forem pequenas), então podemos considerar o diagrama de equilíbrio de forças representado na figura 2.

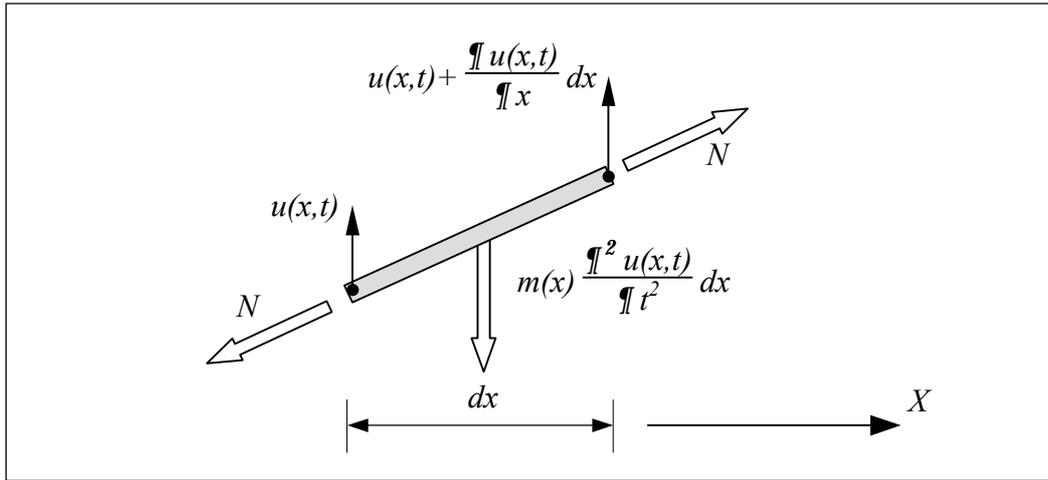


Figura 2 – Equilíbrio de um troço de corda vibrante.

Sendo $u(x,t)$ o deslocamento segundo a direcção perpendicular à direcção X, obtem-se a seguinte equação de equilíbrio:

$$N \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + m \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} dx - N \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} - N \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} dx = 0 \quad (43)$$

Simplificando esta equação obtem-se:

$$m \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - N \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = 0 \quad (44)$$

Fazendo a separação de variáveis já várias vezes mencionada, e eliminando a variável dependente do tempo, a equação toma a seguinte forma:

$$m\bar{u}(x) p^2 + N \bar{u}''(x) = 0 \quad (45)$$

Fazendo a substituição indicada na equação (46), obtemos finalmente uma equação que é idêntica à obtida para o estudo das vibrações longitudinais (16).

$$c_0 = \sqrt{\frac{N}{m}} \quad (46)$$

$$\bar{u}''(x) + \left(\frac{p}{c_0}\right)^2 \bar{u}(x) = 0 \quad (16)$$

As soluções desta equação obedecem à equação (17), que se reproduz novamente:

$$\bar{u}(x) = A \sin\left(\frac{p}{c_0} x\right) + B \cos\left(\frac{p}{c_0} x\right) \quad (17)$$

As constantes A e B dependem das condições de fronteira. Neste tipo de problema as diferentes condições de fronteira correspondem apenas a diferentes “cotas” das extremidades da corda vibrante.

Quadro 1 – Vibrações longitudinais de barras uniformes de secção constante.

Vibrações longitudinais de barras de secção constante	
Equação característica	$\bar{u}''(x) + \left(\frac{p}{c_0}\right)^2 \bar{u}(x) = 0$ com $c_0 = \sqrt{\frac{EA}{m}}$
Solução	$\bar{u}(x) = A \operatorname{sen}\left(\frac{p}{c_0} x\right) + B \cos\left(\frac{p}{c_0} x\right)$

Barra com ambas extremidades fixas	
Condições de fronteira	$\bar{u}(0) = 0 ; \bar{u}(L) = 0$
Frequências próprias	$p_n = \frac{n \pi c_0}{L} \quad n = 1, 2, 3, \dots$
Configurações dos modos (não normalizadas)	$\bar{u}(x) = A \operatorname{sen}\left(\frac{n \pi}{L} x\right) \quad n = 1, 2, 3, \dots$
Configurações dos modos (normalizadas)	$z(x) = \sqrt{\frac{2}{mL}} \operatorname{sen}\left(\frac{n \pi}{L} x\right) \quad n = 1, 2, 3, \dots$
Barra com ambas extremidades livres	
Condições de fronteira	$N(0) = 0 ; N(L) = 0$
Frequências próprias	$p_n = \frac{n \pi c_0}{L} \quad n = 1, 2, 3, \dots$
Configurações dos modos (não normalizadas)	$\bar{u}(x) = B \cos\left(\frac{n \pi}{L} x\right) \quad n = 1, 2, 3, \dots$
Configurações dos modos (normalizadas)	$z(x) = \sqrt{\frac{2}{mL}} \cos\left(\frac{n \pi}{L} x\right) \quad n = 1, 2, 3, \dots$
Barra com uma extremidade livre e outra fixa	
Condições de fronteira	$\bar{u}(0) = 0 ; N(L) = 0$
Frequências próprias	$p_n = \frac{(2n-1) \pi c_0}{2L} \quad n = 1, 2, 3, \dots$
Configurações dos modos (não normalizadas)	$\bar{u}(x) = A \operatorname{sen}\left(\frac{(2n-1) \pi}{2L} x\right) \quad n = 1, 2, 3, \dots$
Configurações dos modos (normalizadas)	$z(x) = \sqrt{\frac{2}{mL}} \operatorname{sen}\left(\frac{(2n-1) \pi}{2L} x\right) \quad n = 1, 2, 3, \dots$

3. Vibração transversal de barras

Considere-se uma barra com alinhamento recto, com momento de inércia $I(x)$, massa por unidade de comprimento m e módulo de elasticidade E . Se se admitir que M é o momento flector que actua uma secção transversal genérica da barra recta e que u representa o deslocamento transversal dessa secção, então podem-se estabelecer as equação de equilíbrio de forças e momentos dum troço de barra de comprimento infinitesimal. Na figura 3 estão representadas as forças e os momentos envolvidos no equilíbrio duma porção infinitesimal da barra.

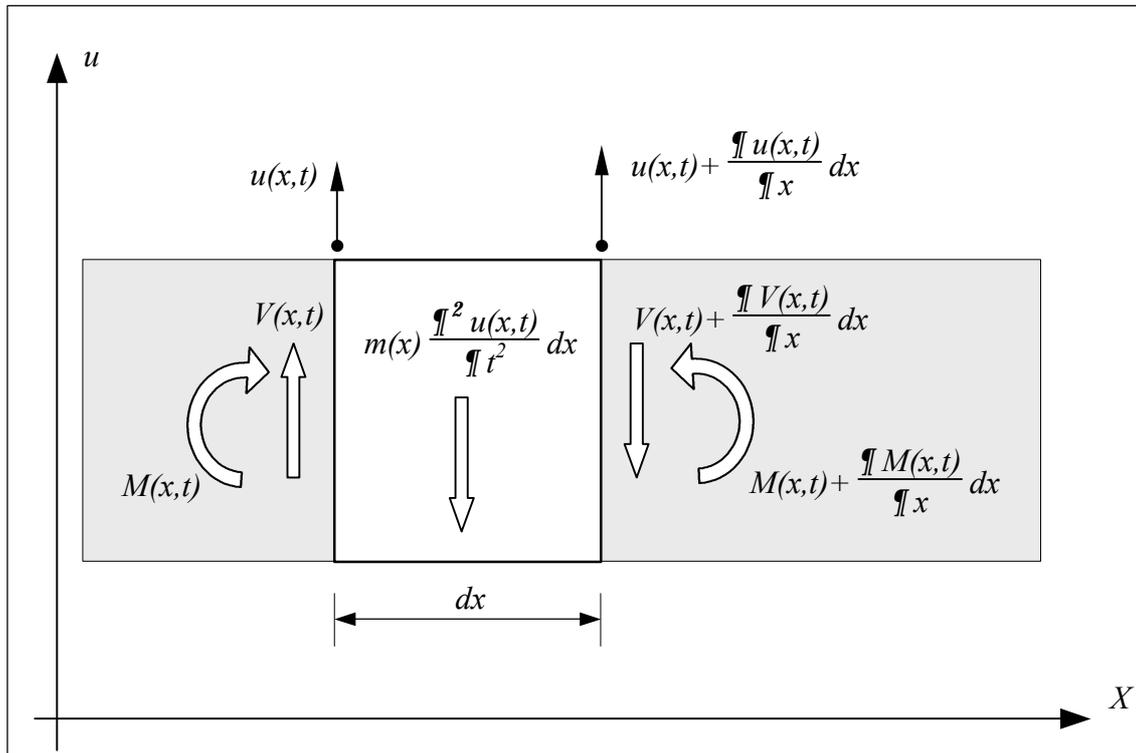


Figura 3 – Equilíbrio de um elemento infinitesimal de barra.

$$V(x,t) - m(x) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} dx - V(x,t) - \frac{\partial V(x,t)}{\partial x} dx = 0 \quad (47)$$

$$M(x,t) + V(x,t) dx - \left(m(x) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} dx \right) \frac{dx}{2} - M(x,t) - \frac{\partial M(x,t)}{\partial x} dx = 0 \quad (48)$$

- $u(x,t)$ - deslocamento transversal ao eixo X;
- $V(x,t)$ - esforço transverso;
- $M(x,t)$ - momento flector;

Tendo em conta que na equação (48) o termo que envolve a força de inércia pode ser desprezado, pois multiplica pelo quadrado do comprimento infinitesimal dx , e após alguns arranjos numéricos, as equações (47) e (48) tomam o seguinte aspecto:

$$\frac{\partial V(x,t)}{\partial x} = -m(x) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} \quad (49)$$

$$V(x,t) = \frac{\partial M(x,t)}{\partial x} \quad (50)$$

Substituindo em (49) a equação do esforço transversal obtido em (50) obtem-se a seguinte equação:

$$\frac{\partial^2 M(x,t)}{\partial x^2} = -m(x) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} \quad (51)$$

Como,

$$M = EI(x) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \quad (52)$$

então temos:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI(x) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \right) + m(x) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = 0 \quad (53)$$

Se a barra for uniforme, isto é, as suas características mecânicas e a sua massa não variam ao longo do comprimento da barra ($EI = \text{constante}$ e $m = \text{constante}$), então a equação (53) pode ser simplificada ficando com o seguinte aspecto:

$$EI \frac{\partial^4 u(x,t)}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = 0 \quad (54)$$

Faça-se agora a separação da variável $u(x,t)$ em duas parcelas, representando uma delas a configuração deformada e outra a variação no tempo que se admite harmónica. Esta separação da variável inicial é semelhante à que foi utilizada no estudo das vibrações longitudinais de barras.

$$u(x,t) = \bar{u}(x) Y(t) \quad (5)$$

$$Y(t) = \text{sen}(p t) \quad (6)$$

Fazendo as devidas substituições na equação (54) tendo em conta as expressões (5) e (6), obtem-se:

$$EI \frac{d^4 \bar{u}(x)}{dx^4} Y(t) - m \bar{u}(x) p^2 Y(t) = 0 \quad (55)$$

Eliminando a variável dependente do tempo $Y(t)$, obtem-se uma nova equação só dependente da variável que representa a configuração da deformada da estrutura.

$$\frac{d^4 \bar{u}(x)}{dx^4} - \bar{u}(x) p^2 \frac{m}{EI} = 0 \quad (56)$$

Esta equação traduz um problema de valores e vectores próprios cuja solução tem a seguinte expressão geral:

$$\bar{u}(x) = A \cosh(\alpha x) + B \sinh(\alpha x) + C \cos(\alpha x) + D \sin(\alpha x) \quad (57)$$

com,

$$\alpha = \sqrt[4]{p^2 \frac{m}{EI}} \quad (58)$$

As constantes que A, B, C e D dependem das condições de fronteira. O cálculo dos modos de vibração e das respectivas frequências próprias resume-se à determinação dos valores das referidas constantes para cada tipo de condições de fronteira.

A título de exemplo apresenta-se de seguida e resolução do problema para uma barra encastrada numa extremidade e livre na outra (consola).

Barra encastrada-livre

Condições de fronteira:

- 1) $\bar{u}(0) = 0$
- 2) $\bar{u}'(0) = 0$
- 3) $M(L) = 0 \quad \mathbf{P} \quad \bar{u}''(L) = 0$
- 4) $V(L) = 0 \quad \mathbf{P} \quad \bar{u}'''(L) = 0$

Solução geral : $\bar{u}(x) = A \cosh(\alpha x) + B \sinh(\alpha x) + C \cos(\alpha x) + D \sin(\alpha x)$

$$\bar{u}'(x) = \alpha A \sinh(\alpha x) + \alpha B \cosh(\alpha x) - \alpha C \sin(\alpha x) + \alpha D \cos(\alpha x)$$

$$\bar{u}''(x) = \alpha^2 A \cosh(\alpha x) + \alpha^2 B \sinh(\alpha x) - \alpha^2 C \cos(\alpha x) - \alpha^2 D \sin(\alpha x)$$

$$\bar{u}'''(x) = \alpha^3 A \sinh(\alpha x) + \alpha^3 B \cosh(\alpha x) + \alpha^3 C \sin(\alpha x) - \alpha^3 D \cos(\alpha x)$$

Substituindo nas condições de fronteira:

- 1) $\bar{u}(0) = 0 \quad \mathbf{P} \quad A + C = 0 \quad \mathbf{P} \quad A = -C$
- 2) $\bar{u}'(0) = 0 \quad \mathbf{P} \quad B + D = 0 \quad \mathbf{P} \quad B = -D$
- 3) $\bar{u}''(L) = 0 \quad \mathbf{P} \quad A \cosh(\alpha L) + B \sinh(\alpha L) - C \cos(\alpha L) - D \sin(\alpha L) = 0$
- 4) $\bar{u}'''(L) = 0 \quad \mathbf{P} \quad A \sinh(\alpha L) + B \cosh(\alpha L) + C \sin(\alpha L) - D \cos(\alpha L) = 0$

$$1) A = -C$$

$$2) B = -D$$

$$3) A [\cosh(\alpha L) + \cos(\alpha L)] + B [\sinh(\alpha L) + \sin(\alpha L)] = 0$$

$$4) A [\sinh(\alpha L) - \sin(\alpha L)] + B [\cosh(\alpha L) + \cos(\alpha L)] = 0$$

.....

$$3) A = -B \frac{[\sinh(\alpha L) + \sin(\alpha L)]}{[\cosh(\alpha L) + \cos(\alpha L)]} \quad (\text{note-se que } [\cosh(\alpha L) + \cos(\alpha L)] \neq 0, \text{ para qualquer } \alpha L)$$

$$4) -B \frac{[\sinh(\alpha L) + \sin(\alpha L)]}{[\cosh(\alpha L) + \cos(\alpha L)]} [\sinh(\alpha L) - \sin(\alpha L)] + B [\cosh(\alpha L) + \cos(\alpha L)] = 0$$

.....

$$4) B \{[\cosh(\alpha L) + \cos(\alpha L)]^2 - [\sinh^2(\alpha L) - \sin^2(\alpha L)]\} = 0$$

Esta equação tem duas soluções possíveis:

$$B = 0 \quad (\text{solução trivial})$$

$$\text{ou} \quad [\cosh(\alpha L) + \cos(\alpha L)]^2 - [\sinh^2(\alpha L) - \sin^2(\alpha L)] = 0$$

Somente a segunda solução nos interessa, pelo que se considera:

$$4) [\cosh(\alpha L) + \cos(\alpha L)]^2 - [\sinh^2(\alpha L) - \sin^2(\alpha L)] = 0$$

$$4) \cosh^2(\alpha L) + \cos^2(\alpha L) + 2 \cosh(\alpha L) \cos(\alpha L) - \sinh^2(\alpha L) + \sin^2(\alpha L) = 0$$

$$4) [\cosh^2(\alpha L) - \sinh^2(\alpha L)] + [\cos^2(\alpha L) + \sin^2(\alpha L)] + 2 \cosh(\alpha L) \cos(\alpha L) = 0$$

$$4) 2 + 2 \cosh(\alpha L) \cos(\alpha L) = 0$$

$$4) \cosh(\alpha L) = \frac{-1}{\cos(\alpha L)}$$

As soluções desta equação encontram-se indicadas no Quadro 2. Como se pode observar neste quadro, as frequências de vibração associadas a cada modo são obtidas a partir das soluções da equação atrás representada.

Para obter as configurações modais, tem que se proceder à substituição, nas várias equações, do valor de α_n correspondente ao modo em estudo, calculando deste modo os valores das constantes presentes na equação geral. Como seria de esperar a configuração modal obtida é indeterminada, ou seja, depende duma constante, que pode ter um valor arbitrário. No Quadro 2 está indicada a expressão geral para todas as configurações modais. Neste caso optou-se por normalizar todos os modos considerando unitário o valor do deslocamento máximo. No mesmo quadro encontram-se representados os três primeiros modos de vibração.

Nos quadros 3 a 5 encontram-se indicadas as soluções correspondentes a outras condições de apoio da barra.

Também na análise da vibração transversal de barras contínuas se pode considerar a normalização dos modos em relação à massa, utilizando para isso a expressão de normalização apresentada anteriormente (18).

$$\int_0^L m [z(x)]^2 dx = 1 \quad (18)$$

$z(x)$ – configuração normalizada dos modos

A condição de ortogonalidade dos modos em relação à massa também se mantém equivalente à que foi apresentada no caso das vibrações longitudinais de barras (20).

$$\int_0^L m \bar{u}_n(x) \bar{u}_m(x) dx = 0 \quad m \neq n \quad (20)$$

A condição de ortogonalidade, envolvendo a rigidez da estrutura, pode ser obtida a partir da equação de equilíbrio dinâmico representada em (53), considerando somente a contribuição do modo de vibração n :

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI(x) \frac{\partial^2 u_n(x,t)}{\partial x^2} \right) + m(x) \frac{\partial^2 u_n(x,t)}{\partial t^2} = 0 \quad (53)$$

Fazendo a alteração de variáveis indicada em (23) e eliminando a variável que depende do tempo, temos:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(EI(x) \frac{d^2 \bar{u}_n(x)}{dx^2} \right) - p_n^2 m(x) \bar{u}_n(x) = 0 \quad (59)$$

Multiplicando toda a equação pela configuração do modo m , e integrando ao longo do comprimento da barra obtém-se:

$$\int_0^L \bar{u}_m(x) \frac{d^2}{dx^2} \left(EI(x) \frac{d^2 \bar{u}_n(x)}{dx^2} \right) dx - \int_0^L p_n^2 \bar{u}_m(x) m(x) \bar{u}_n(x) dx = 0 \quad (60)$$

Como devido à propriedade de ortogonalidade dos modos de vibração em relação à massa o segundo termo da equação é nulo, resta a seguinte igualdade que traduz a segunda condição de ortogonalidade:

$$\int_0^L \bar{u}_m(x) \frac{d^2}{dx^2} \left(EI(x) \frac{d^2 \bar{u}_n(x)}{dx^2} \right) dx = 0 \quad \text{se } m \neq n \quad (61)$$

Em geral não é esta a forma de apresentar esta condição de ortogonalidade. A equação normalmente utilizada para exprimir esta condição pode ser obtida a partir da equação (61) fazendo uma dupla integração por partes:

$$\begin{aligned} \int_0^L \bar{u}_m(x) \frac{d^2}{dx^2} \left(EI(x) \frac{d^2 \bar{u}_n(x)}{dx^2} \right) dx &= \\ &= \bar{u}_m(x) \frac{d}{dx} \left(EI(x) \frac{d^2 \bar{u}_n(x)}{dx^2} \right) \Big|_0^L - \int_0^L \frac{d\bar{u}_m(x)}{dx} \frac{d}{dx} \left(EI(x) \frac{d^2 \bar{u}_n(x)}{dx^2} \right) dx = 0 \end{aligned} \quad (62)$$

Recordemos que:

$$\frac{d}{dx} \left(EI(x) \frac{d^2 \bar{u}_n(x)}{dx^2} \right) = V_n(x) \quad (63)$$

Assim, recorrendo a esta igualdade pode-se simplificar a equação (62) executando posteriormente a segunda passagem na integração por partes:

$$\bar{u}_m(x) V_n(x) \Big|_0^L - \frac{d\bar{u}_m(x)}{dx} EI(x) \frac{d^2 \bar{u}_n(x)}{dx^2} \Big|_0^L + \int_0^L \frac{d^2 \bar{u}_m(x)}{dx^2} EI(x) \frac{d^2 \bar{u}_n(x)}{dx^2} dx = 0 \quad (64)$$

$$EI(x) \frac{d^2 \bar{u}_n(x)}{dx^2} = M_n(x) \quad (65)$$

Recorrendo à equação (65) é possível simplificar a equação (64) para a seguinte forma:

$$\bar{u}_m(x) V_n(x) \Big|_0^L - \bar{u}_m'(x) M_n(x) \Big|_0^L + \int_0^L \bar{u}_m''(x) EI(x) \bar{u}_n''(x) dx = 0 \quad (66)$$

Note-se que na maioria dos problemas estudados as condições de fronteira são de tal forma que o produto representado nas primeira parcelas da equação (66) são nulos. Deste modo a condição de ortogonalidade pode ser apresentada na sua forma mais corrente:

$$\int_0^L EI(x) \bar{u}_n''(x) \bar{u}_m''(x) dx = 0 \quad m \neq n \quad (67)$$

A partir da equação (60) e se considerarmos dois modos iguais, ou seja m igual a n , obtem-se a seguinte igualdade:

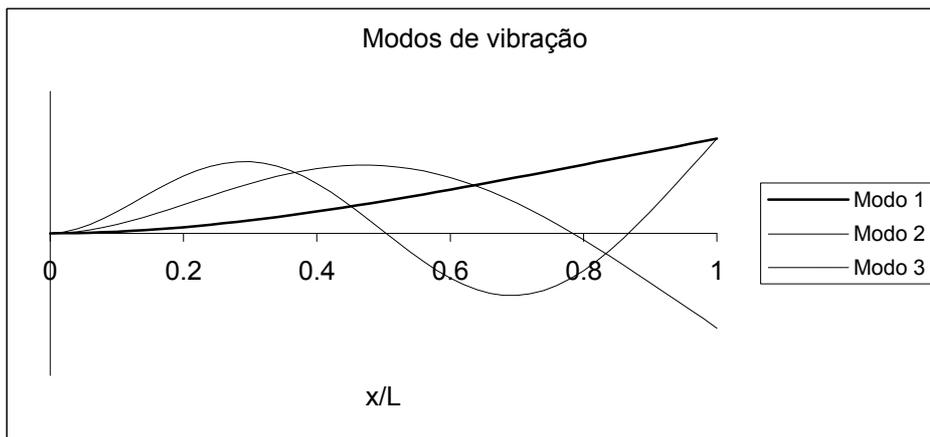
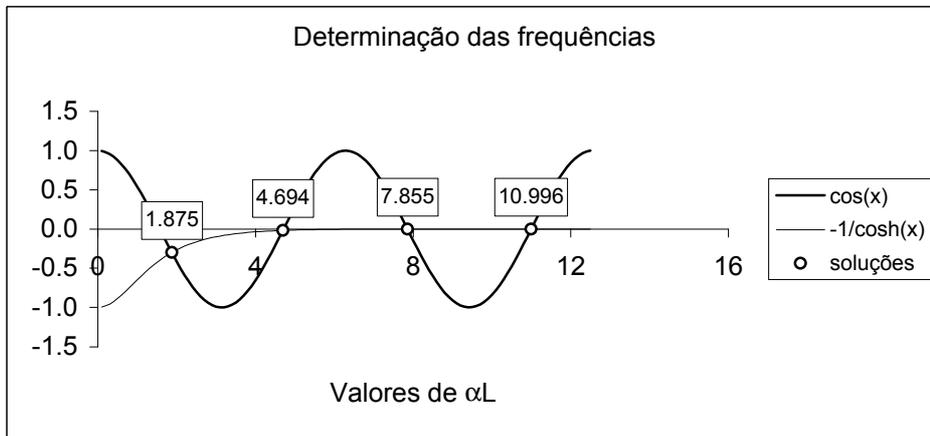
$$\int_0^L EI(x) \bar{u}_n''(x) \bar{u}_n''(x) dx = -p_n^2 M_n \quad (68)$$

Verifica-se também que, se representarmos as configurações modais $z(x)$ normalizadas em relação à massa, de acordo com a expressão (18), então é válida a seguinte relação:

$$\int_0^L EI [z_n''(x)] dx = p_n^2 \quad (69)$$

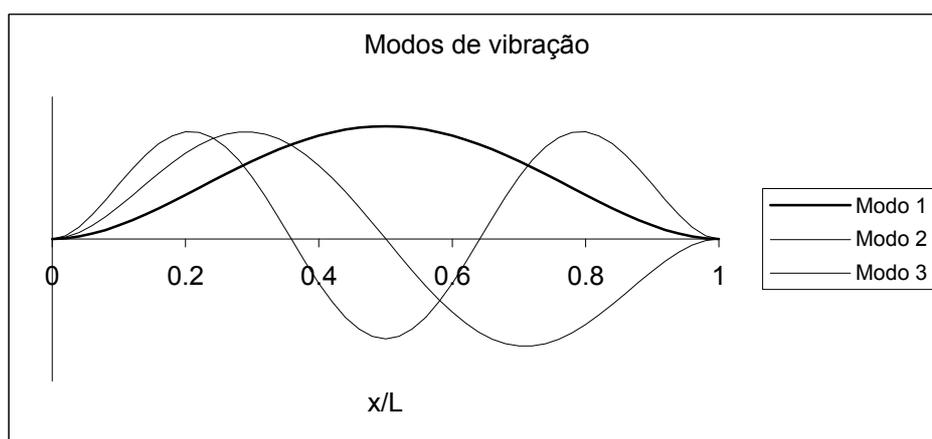
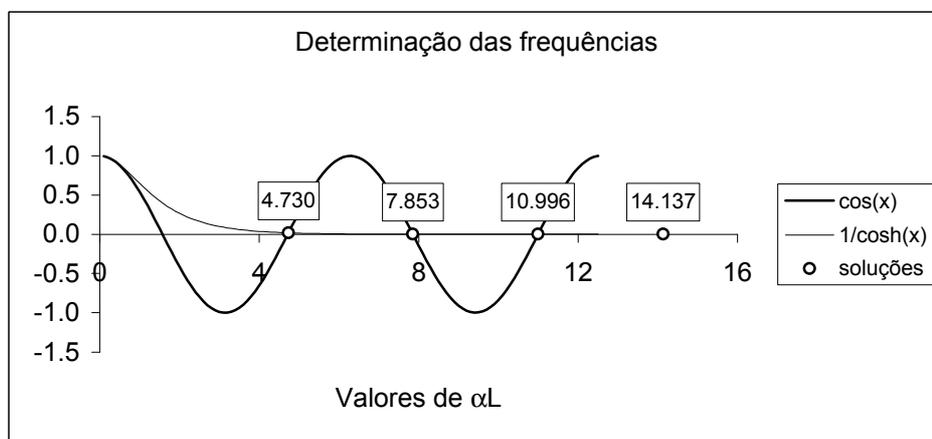
Quadro 2 – Vibrações transversais numa barra encastrada-livre.

Barra encastrada numa extremidade e livre na outra	
Condições de fronteira	$\bar{u}(0) = 0 ; \bar{u}'(0) = 0 ; M(L) = 0 ; V(L) = 0$
Equação das frequências	$\cos(aL) = \frac{-1}{\cosh(aL)}$
Frequências - $p_n = a_n^2 \sqrt{\frac{EI}{m}}$	$a_1 = \frac{1.875}{L}, a_2 = \frac{4.694}{L}, a_3 = \frac{7.855}{L}, a_4 = \frac{10.996}{L}, \dots a_n \approx \frac{(2n-1)\pi}{2L}$
Configurações dos modos (não normalizadas)	$\bar{u}(x) = \cosh(a_n x) - \cos(a_n x) - \beta_n (\sinh(a_n x) - \sin(a_n x))$ $\beta_n = \frac{\cosh a_n L + \cos a_n L}{\sinh a_n L + \sin a_n L}$



Quadro 3 – Vibrações transversais numa barra encastrada em ambas extremidades.

Barra encastrada em ambas extremidades	
Condições de fronteira	$\bar{u}(0) = 0 ; \bar{u}'(0) = 0 ; \bar{u}(L) = 0 ; \bar{u}'(L) = 0$
Equação das frequências	$\cosh(aL) \cos(aL) - 1 = 0$
Frequências $-p_n = a_n^2 \sqrt{\frac{EI}{m}}$	$a_1 = \frac{4.730}{L} ; a_2 = \frac{7.853}{L} ; a_3 = \frac{11.00}{L} ; a_4 = \frac{14.137}{L} ; \dots a_n \approx \frac{(2n+1)\pi}{2L}$
Configurações dos modos (não normalizadas)	$\bar{u}(x) = \cosh(a_n x) - \cos(a_n x) - \gamma_n (\sinh(a_n x) - \sin(a_n x))$ $\gamma_n = \frac{\cosh a_n L - \cos a_n L}{\sinh a_n L - \sin a_n L}$



Quadro 4 – Vibrações transversais numa barra encastrada-rotulada.

Barra encastrada numa extremidade e rotulada na outra	
Condições de fronteira	$\bar{u}(0) = 0 ; \bar{u}(L) = 0 ; \bar{u}'(0) = 0 ; M(L) = 0$
Equação das frequências	$\text{tg}(aL) = \text{tgh}(aL)$
Frequências $-p_n = a_n^2 \sqrt{\frac{EI}{m}}$	$a_1 = \frac{3.927}{L} ; a_2 = \frac{7.069}{L} ; a_3 = \frac{10.210}{L} ; a_4 = \frac{13.352}{L} ; \dots a_n \approx \frac{(4n+1)\pi}{4L}$
Configurações dos modos (não normalizadas)	$\bar{u}(x) = \cosh(a_n x) - \cos(a_n x) - \gamma_n (\sinh(a_n x) - \sin(a_n x))$ $\gamma_n = \frac{\cosh a_n L - \cos a_n L}{\sinh a_n L - \sin a_n L}$

Determinação das frequências

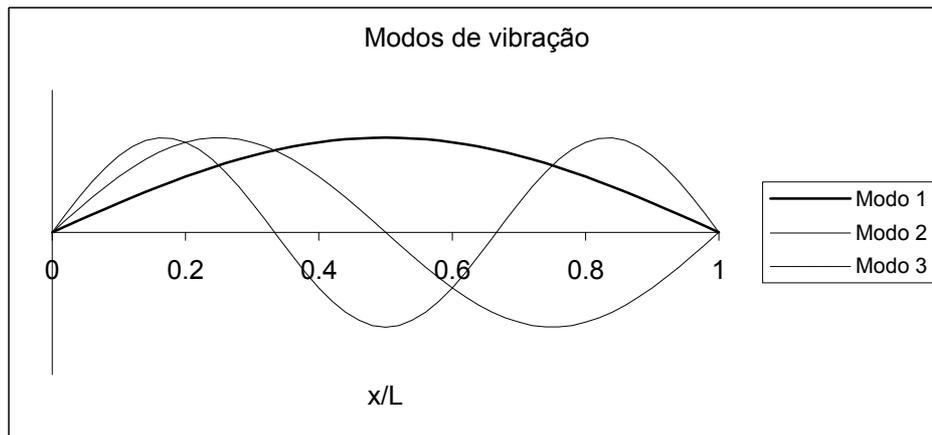
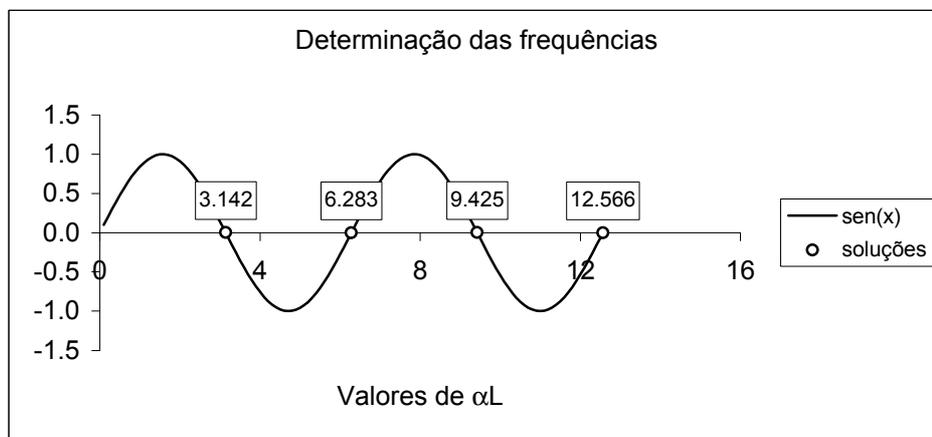
Valores de αL

Modos de vibração

x/L

Quadro 5 – Vibrações transversais numa barra rotulada em ambas extremidades.

Barra rotulada em ambas extremidades	
Condições de fronteira	$\bar{u}(0) = 0 ; \bar{u}(L) = 0 ; M(0) = 0 ; M(L) = 0$
Equação das frequências	$\text{sen}(aL) = 0$
Frequências $-p_n = a_n^2 \sqrt{\frac{EI}{m}}$	$a_n = \frac{n\pi}{L}$
Configurações dos modos (não normalizadas)	$\bar{u}(x) = \text{sen}(a_n x)$



4. Vibração de lajes

Nesta secção pretende-se dar uma breve panorâmica do problema da determinação das frequências próprias e dos modos de vibração de lajes. O objectivo é somente fornecer alguma informação que permita fazer uma estimativa das frequências fundamentais de lajes com diversos tipos de apoio.

Considere-se uma laje de espessura uniforme h , composta por um material homogéneo e isotrópico, com módulo de elasticidade E , coeficiente de Poisson ν , e densidade de massa ρ .

Nestas condições a equação que traduz o equilíbrio dinâmico da laje, para forças actuando na direcção perpendicular ao seu folheto médio toma o seguinte aspecto:

$$\frac{\partial^4 u(x_1, x_2, t)}{\partial x_1^4} + 2 \frac{\partial^4 u(x_1, x_2, t)}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4 u(x_1, x_2, t)}{\partial x_2^4} + \frac{\rho h}{D} \frac{\partial^2 u(x_1, x_2, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (70)$$

$$D = \frac{E h^3}{12 (1 - \nu^2)} \quad (71)$$

$u(x_1, x_2, t)$ - deslocamento perpendicular ao plano da laje

Fazendo a separação de variáveis de modo a isolar a componente dependente do tempo temos:

$$u(x_1, x_2, t) = \bar{u}(x_1, x_2) \sin(p t) \quad (72)$$

$$\frac{\partial^4 \bar{u}(x_1, x_2)}{\partial x_1^4} + 2 \frac{\partial^4 \bar{u}(x_1, x_2)}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4 \bar{u}(x_1, x_2)}{\partial x_2^4} = \frac{\rho h}{D} p^2 \bar{u}(x_1, x_2) \quad (73)$$

Esta equação diferencial de 4ª ordem a duas dimensões traduz um problema de valores e vectores próprios cujas soluções são, respectivamente, as frequências próprias e os modos de vibração da laje. Para resolver o problema é necessário, em cada caso, definir as condições de fronteira adequadas às condições de apoio da laje em estudo. Recordase que, no caso das lajes, as condições de fronteira correspondentes às condições de apoio mais frequentes têm o seguinte aspecto:

$$\text{Bordo encastrado - } \quad \bar{u} = 0; \quad \frac{\partial \bar{u}}{\partial y_1} = 0$$

$$\text{Bordo simplesmente apoiado - } \quad \bar{u} = 0; \quad \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y_1^2} + \nu \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y_2^2} = 0$$

$$\text{Bordo livre - } \quad \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y_1^2} + \nu \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y_2^2} = 0 \quad \frac{\partial}{\partial y_1} \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y_1^2} + (2 - \nu) \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y_2^2} \right) = 0$$

Nas equações atrás indicadas considerou-se um referencial local (y_1, y_2) , definido de forma a que a direcção y_2 coincida com o alinhamento do bordo.

Para lajes retangulares com todos os bordos simplesmente apoiados obtêm-se as seguintes expressões, respectivamente para as frequências e para as configurações modais (Duarte,1983):

$$p_{mn} = \pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) \sqrt{\frac{D}{r h}} \quad (74)$$

$$u_{mn} = \text{sen} \left(\frac{m \pi x_1}{a} \right) \text{sen} \left(\frac{n \pi x_2}{b} \right) \quad (75)$$

com $0 \leq x_1 \leq a$ e $0 \leq x_2 \leq b$

Na figura 4 estão representados 4 modos de vibração, correspondentes às combinações possíveis dos parâmetros **m** e **n** para valores entre 1 e 2.

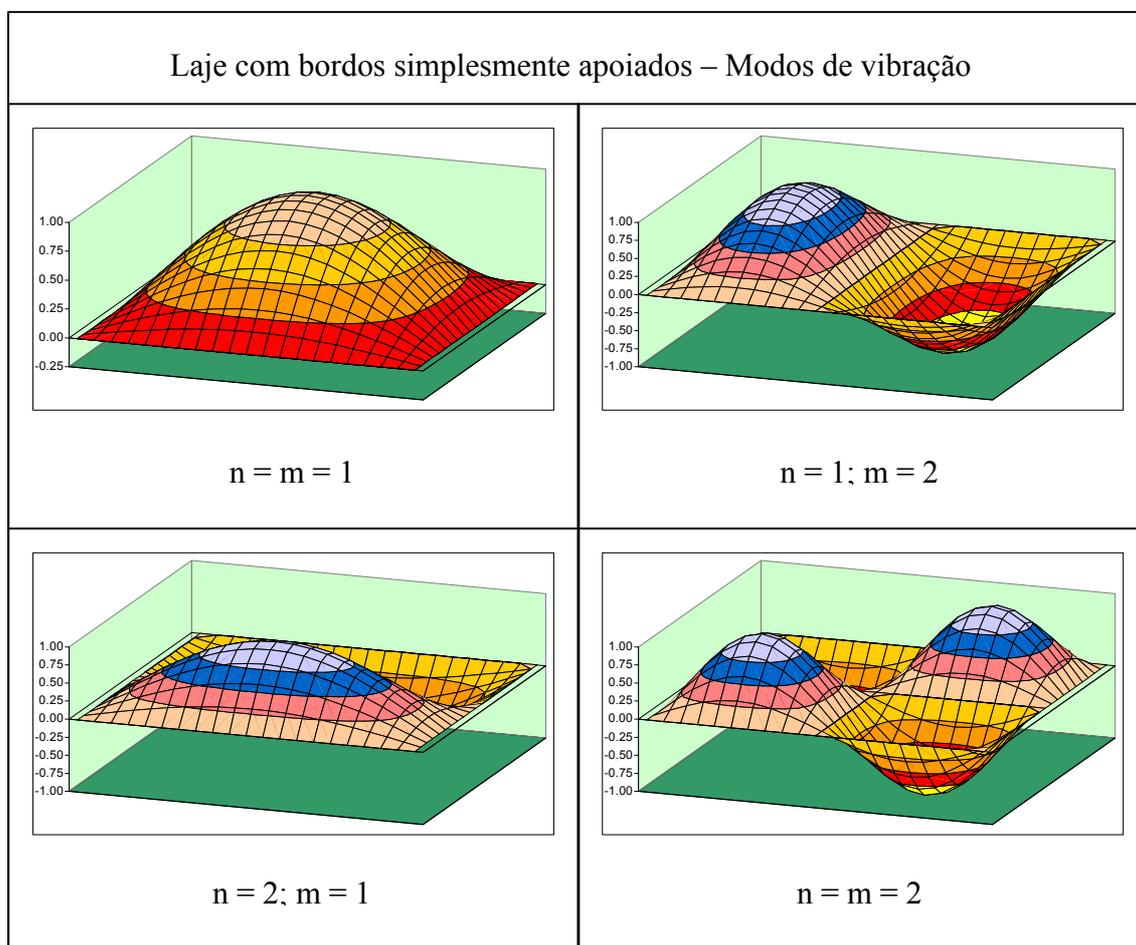
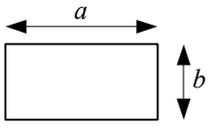
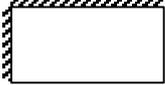


Figura 4 – Modos de vibração de uma laje rectangular com os bordos simplesmente apoiados.

No quadro 6 encontram-se tabelados os valores das frequências de vibração para lajes retangulares com vários tipos de condições de apoio e para algumas relações de dimensão entre lados.

Quadro 6 – Frequências próprias de lajes rectangulares.

$p_n = \frac{\lambda}{a^2} \sqrt{\frac{D}{r h}}$				
Condições de fronteira	$\frac{b}{a}$	Valores de λ		
		Modos de vibração		
		1º	2º	3º
	1	14.1	20.5	23.9
	1	6.96	24.1	26.8
	2	3.51	5.37	22.0
	1	3.49	8.55	21.4
	0.5	3.47	14.9	21.6
	2	17.3	-	-
	1	23.7	51.7	58.7
	0.5	51.7	-	-
	2	23.8	-	-
	1	29.0	54.8	69.3
	0.5	54.8	-	-
	1	36.0	73.4	108.3
	2	24.6	-	-
	3	23.2	-	-
	8	22.4	-	-

(adaptado de Duarte, 1983)

5. Resolução das equações de movimento

Existe um grande paralelo entre a metodologia utilizada para a análise modal de sistemas discretos e aquela que é aplicável a sistemas contínuos, tema abordado neste texto.

De acordo com o conceito de análise modal, qualquer campo de deslocamentos admissível na estrutura pode ser obtido através da sobreposição dos deslocamentos obtidos em cada modo de vibração:

$$u(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} \bar{u}_i(x) Y_i(t) \quad (76)$$

A partir da igualdade estabelecida em (76) é possível calcular a contribuição de cada modo de vibração numa determinada configuração deformada recorrendo para tal às condições de ortogonalidade referidas anteriormente. Assim, se se pretende calcular a participação do modo n , deve-se multiplicar ambos os membros da equação (76) pela configuração do modo em estudo e pelo termo que representa a massa ($m(x)$) e integrar em ordem à variável de posição x :

$$\int_0^L \bar{u}_n(x) m(x) u(x,t) dx = \sum_{i=1}^{\infty} Y_i(t) \int_0^L \bar{u}_n(x) m(x) \bar{u}_i(x) dx \quad (77)$$

O segundo termo da igualdade representada em (77) de acordo com as propriedades da ortogonalidade será nulo excepto quando i for igual a n , situação em que o integral conduz ao parâmetro M_n .

$$\int_0^L \bar{u}_n(x) m(x) u(x,t) dx = Y_n(t) M_n \quad (78)$$

$$Y_n(t) = \frac{\int_0^L \bar{u}_n(x) m(x) u(x,t) dx}{M_n} \quad (79)$$

A grandeza $Y_n(t)$, representa a participação do modo n na resposta global da estrutura ao longo do tempo.

Da mesma forma como acontece com os osciladores discretos, também no caso do osciladores contínuos é possível, a partir das condições de ortogonalidade, transformar as equações de movimento num sistema de equações independentes. Nesta forma cada uma das equações que se obtém exprime a resposta de um determinado modo de vibração. Para, finalmente, obter a resposta global a partir da resposta em cada um dos modos basta aplicar então a expressão (76), que traduz a sobreposição modal da resposta.

5.1. Vibrações longitudinais

A equação do movimento de um oscilador contínuo sujeito a vibrações longitudinais sem amortecimento pode ser obtida a partir da equação (4):

$$m(x) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left[EA(x) \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right] = q(x,t) \quad (80)$$

$q(x,t)$ - força aplicada no ponto de coordenada x no instante t

Fazendo a substituição indicada em (76) e que traduz a sobreposição modal, fica:

$$\sum_{i=1}^{\infty} m(x) \bar{u}_i(x) \ddot{Y}_i(t) - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{d}{dx} \left[EA(x) \frac{d \bar{u}_i(x)}{dx} \right] Y_i(t) = q(x,t) \quad (81)$$

Multiplicando ambos os termos da equação (81) pela configuração do modo n e integrando ao longo da barra obtém-se:

$$\begin{aligned} \int_0^L \bar{u}_n(x) \sum_{i=1}^{\infty} m(x) \bar{u}_i(x) \ddot{Y}_i(t) dx - \int_0^L \bar{u}_n(x) \sum_{i=1}^{\infty} \frac{d}{dx} \left[EA(x) \frac{d \bar{u}_i(x)}{dx} \right] Y_i(t) dx = \\ = \int_0^L \bar{u}_n(x) q(x,t) dx \end{aligned} \quad (82)$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} \ddot{Y}_i(t) \int_0^L \bar{u}_n(x) m(x) \bar{u}_i(x) dx - \sum_{i=1}^{\infty} Y_i(t) \int_0^L \bar{u}_n(x) \frac{d}{dx} \left[EA(x) \frac{d \bar{u}_i(x)}{dx} \right] dx = \\ = \int_0^L \bar{u}_n(x) q(x,t) dx \end{aligned} \quad (83)$$

Recorrendo às propriedades da ortogonalidade de modos e recordando as relações que se obtêm quando as integrações representadas se referem ao mesmo modo de vibração e que estão traduzidas nas equações (26) e (35), então pode-se escrever a equação de equilíbrio dinâmico correspondente ao modo n .

$$M_n \ddot{Y}_n(t) + p_n^2 M_n Y_n(t) = \int_0^L \bar{u}_n(x) q(x,t) dx \quad (84)$$

Para simplificar a notação considere-se o seguinte parâmetro que representa a participação da força de excitação no correspondente modo de vibração n :

$$\int_0^L \bar{u}_n(x) q(x,t) dx = P_n(t) \quad (85)$$

Utilizando esta notação a equação do movimento referente ao modo n fica com a expressão final que de seguida se apresenta e que é em tudo semelhante às equações

obtidas para sistemas discretos, ou, numa forma mais geral, semelhante à equação de movimento de um sistema de um grau de liberdade.

$$M_n \ddot{Y}_n(t) + p_n^2 M_n Y_n(t) = P_n(t) \quad (86)$$

5.2. Vibrações transversais

Como se pode verificar de seguida a equação de equilíbrio dinâmico que se obtém para cada modo de vibração no caso do estudo das vibrações transversais é idêntica à equação obtida para as vibrações longitudinais.

A equação do movimento de um oscilador contínuo sujeito a vibrações transversais sem amortecimento pode ser obtida a partir da equação (53):

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI(x) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \right) + m(x) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = p(x,t) \quad (87)$$

$p(x,t)$ - força aplicada no ponto de coordenada x no instante t

Fazendo a substituição indicada em (76) e que traduz a sobreposição modal, fica:

$$\sum_{i=1}^{\infty} m(x) u_i(x) \ddot{Y}_i(t) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{d^2}{dx^2} \left[EI(x) \frac{d^2 u_i(x)}{dx^2} \right] Y_i(t) = p(x,t) \quad (88)$$

Multiplicando ambos os termos da equação (88) pela configuração do modo n e integrando ao longo da barra obtém-se:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} \ddot{Y}_i(t) \int_0^L u_n(x) m(x) u_i(x) dx + \sum_{i=1}^{\infty} Y_i(t) \int_0^L u_n(x) \frac{d^2}{dx^2} \left[EI(x) \frac{d^2 u_i(x)}{dx^2} \right] dx = \\ = \int_0^L u_n(x) p(x,t) dx \end{aligned} \quad (89)$$

Recorrendo às propriedades da ortogonalidade de modos e recordando as relações que se obtêm quando as integrações representadas se referem ao mesmo modo de vibração e que estão traduzidas nas equações (26) e (68), então pode-se escrever a equação de equilíbrio dinâmico correspondente ao modo n .

$$M_n \ddot{Y}_n(t) + p_n^2 M_n Y_n(t) = \int_0^L u_n(x) p(x,t) dx \quad (90)$$

Mais uma vez para simplificar a notação considere-se o seguinte parâmetro que representa a participação da força de excitação no correspondente modo de vibração n :

$$\int_0^L u_n(x) p(x,t) dx = P_n(t) \quad (91)$$

Utilizando esta notação a equação do movimento referente ao modo n fica com uma expressão idêntica à indicada atrás para o estudo das vibrações longitudinais de barras:

$$M_n \ddot{Y}_n(t) + p_n^2 M_n Y_n(t) = P_n(t) \quad (86)$$

5.3. Movimento com amortecimento

Nas secções anteriores foi apresentada a formulação para a resolução da equação de movimento desprezando o amortecimento.

Para considerar o efeito do amortecimento no movimento pode-se definir um amortecimento modal, proporcional à velocidade, e traduzido através de uma constante de amortecimento C_n :

$$M_n \ddot{Y}_n(t) + C_n \dot{Y}_n(t) + p_n^2 M_n Y_n(t) = P_n(t) \quad (92)$$

$$C_n = a_0 M_n + a_1 p_n^2 M_n \quad (\text{Clough, 1993}) \quad (93)$$

Introduzindo o conceito de coeficiente de amortecimento modal, temos:

$$\zeta_n = \frac{C_n}{2 M_n p_n} = \frac{a_0}{2 p_n} + \frac{a_1 p_n}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{a_0}{p_n} + a_1 p_n \right) \quad (94)$$

$$M_n \ddot{Y}_n(t) + 2 \zeta_n M_n p_n \dot{Y}_n(t) + p_n^2 M_n Y_n(t) = P_n(t) \quad (95)$$

A solução desta equação de movimento, ou deste conjunto de equações de movimento, pode ser obtida através de qualquer método conhecido para o estudo de osciladores de um grau de liberdade.

5.4. Resposta a um movimento do solo

Um tipo particular de sollicitação dinâmica que interessa considerar é o caso da acção sísmica. Esta sollicitação é traduzida pela imposição dum movimento nos pontos de ligação da estrutura ao exterior pelo que é necessário fazer algumas adaptações à formulação atrás indicada.

Para ilustrar a forma como deve ser abordado o problema da acção sísmica será referida somente o problema das vibrações transversais embora os resultados aplicáveis também ao caso das vibrações longitudinais.

Considere-se a hipótese da acção sísmica corresponder a um movimento uniforme do solo, ou seja, com igual movimento em todos os pontos de ligação ao exterior. Desta forma pode-se descrever o campo de deslocamentos da barra da seguinte forma:

$$u^T(x,t) = u(x,t) + u_s(t) \quad (96)$$

$u^T(x,t)$ - deslocamento total da barra

$u(x,t)$ - deslocamento em relação ao solo

$u_s(t)$ - deslocamento do solo

Substituindo a igualdade indicada em (96) na equação de equilíbrio dinâmico duma barra sujeita a vibrações transversais obtém-se:

$$\begin{aligned} m(x) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI(x) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \right) + c(x) \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \\ = -m(x) \frac{\partial^2 u_s(t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI(x) \frac{\partial^2 u_s(t)}{\partial x^2} \right) - c(x) \frac{\partial u_s(t)}{\partial t} \end{aligned} \quad (97)$$

Como o campo de deslocamentos do solo não depende da posição x , o segundo membro da equação (97), que por simplificação se designa por carregamento efectivo (P_{ef}), terá a seguinte forma:

$$P_{ef} = -m(x) \frac{\partial^2 u_s(t)}{\partial t^2} - c(x) \frac{\partial u_s(t)}{\partial t} \quad (98)$$

Na maioria dos casos de aplicação prática a contribuição das forças de amortecimento para o carregamento efectivo é desprezável face à contribuição das forças de inércia (Clough, 1993) pelo que se considera somente:

$$P_{ef} = -m(x) \frac{\partial^2 u_s(t)}{\partial t^2} \quad (99)$$

Assumindo este carregamento, então o termo correspondente ao carregamento associado a cada modo de vibração será:

$$P_{ef,n}(t) = - \int_0^L u_n(x) m(x) \ddot{u}_s(t) dx = - \ddot{u}_s(t) \int_0^L u_n(x) m(x) dx \quad (100)$$

A equação de equilíbrio dinâmico para o modo n passará a ser escrita da seguinte forma:

$$M_n \ddot{Y}_n(t) + 2 \zeta_n M_n p_n \dot{Y}_n(t) + p_n^2 M_n Y_n(t) = - \ddot{u}_s(t) \int_0^L u_n(x) m(x) dx \quad (101)$$

Se se dividir toda a equação pelo termo M_n , teremos:

$$\ddot{Y}(t) + 2 \zeta_n p_n \dot{Y}(t) + p_n^2 Y_i(t) = - \ddot{u}_s(t) \frac{\int_0^L u_n(x) m(x) dx}{M_n} \quad (101)$$

O termo que, no segundo membro da equação, multiplica a aceleração do solo terá o efeito dum factor de participação modal, tal como é definido na formulação para osciladores discretos.

$$F_{Pn} = \frac{\int_0^L u_n(x) m(x) dx}{M_n} \quad (102)$$

Utilizando este novo parâmetro a equação de equilíbrio dinâmico para o modo de vibração n , quando a estrutura é solicitada por um movimento no solo pode ser escrita na seguinte forma:

$$\ddot{Y}_n(t) + 2 \zeta_n p_n \dot{Y}_n(t) + p_n^2 Y_n(t) = - \ddot{u}_s(t) F_{Pn} \quad (103)$$

Tal como foi referido anteriormente, esta expressão é válida quer para movimentos vibratórios transversais quer para movimentos longitudinais.

Esta equação é formalmente idêntica à equação de um oscilador de um grau de liberdade pelo que a sua solução também pode ser obtida através de qualquer método aplicável à resolução do problema de um oscilador de um grau de liberdade.

6. Referências bibliográficas

Clough, R.W. e Penzien, J. – “*Dynamics of Structures*”, McGraw-Hill, 2ª edição, 1993.

Duarte, R. T. – “*Princípios e Métodos da Dinâmica Aplicada à Engenharia de Estruturas (versão preliminar)*”, Seminário 265 – Dinâmica Aplicada, LNEC, 1983.