Revisões de análise modal
e análise sísmica por espectros de resposta

Apontamentos da Disciplina de Dinâmica e Engenharia Sísmica

Mestrado em Engenharia de Estruturas

Instituto Superior Técnico

Luís Guerreiro

Março de 1999

Revisões de análise modal e análise sísmica por espectros de resposta

1 Formulação das equações de equilíbrio dinâmico

As equações de movimento de um sistema de múltiplos graus de liberdade podem ser estabelecidas a partir do equilíbrio das forças associadas a cada grau de liberdade. Duma forma geral podem-se considerar aplicadas no grau de liberdade genérico i, quatro tipos de forças: as forças aplicadas exteriormente p(t), as forças resultantes do movimento e que se dividem em forças de inércia, f_I, forças devidas ao amortecimento, f_A, e forças de deformação elástica, f_E. Assim, o sistema de equações de equilíbrio dinâmico pode ser escrito na seguinte forma:

$$\{f_I\} + \{f_A\} + \{f_E\} = \{p(t)\} \tag{1}$$

Cada um destes vectores de forças resultantes do movimento depende das variáveis que descrevem o movimento e que são o deslocamento, a velocidade e aceleração em cada grau de liberdade. Estas relações podem ser descritas a partir das seguintes expressões:

$$\{f_E\} = [\ K\ ]\ q(t) \tag{2}$$

$$\{f_A\} = [\ C\ ]\ \dot{q}(t) \tag{3}$$

$$\{f_I\} = [\ M\ ]\ \ddot{q}(t) \tag{4}$$

em que:

[K] - é a matriz de rigidez da estrutura relativa aos grau de liberdade considerados;
[C] - é a matriz de amortecimento;
[M] - é a matriz de massa.

Introduzindo estas relações na equação (1) o sistema de equações de equilíbrio dinâmico pode ser escrito na forma que se apresenta:

$$[\ M\ ]\ \{\ddot{q}(t)\} + [\ C\ ]\ \{\dot{q}(t)\} + [\ K\ ]\ \{q(t)\} = \{p(t)\} \tag{5}$$

2 Cálculo das frequências e modos de vibração

O problema da identificação das frequências de vibração de um determinado sistema é resolvido com base na análise do movimento em regime livre e sem amortecimento. Nestas condições as equações de equilíbrio dinâmico tomam uma forma mais simplificada:

$$[\,M\,]\,\{\ddot{q}(t)\} + [\,K\,]\,\{q(t)\} = \{0\} \tag{6}$$

Admita-se que o movimento da estrutura quando vibra com uma dada frequência p é do tipo harmónico traduzido por uma equação do tipo,

$$\{q(t)\} = \{v\}\cos(pt - \phi) \tag{7}$$

{v} – vector que representa a configuração deformada da estrutura (não varia com o tempo);
p – frequência de vibração;
ϕ - fase.

Derivando duas vezes a equação (7) em ordem ao tempo obtem-se a expressão das acelerações ao longo do tempo:

$$\{\ddot{q}(t)\} = -p^2\,\{v\}\cos(pt - \phi) \tag{8}$$

Substituindo as equações (7) e (8) na equação do movimento (6) obtem-se:

$$-p^2\,[\,M\,]\,\{v\}\cos(pt - \phi) + [\,K\,]\,\{v\}\cos(pt - \phi) = \{0\} \tag{9}$$

$$-p^2\,[\,M\,]\,\{v\} + [\,K\,]\,\{v\} = \{0\} \tag{10}$$

$$[\,K - p^2\,M\,]\,\{v\} = \{0\} \tag{11}$$

Para que o sistema de equações (11) tenha uma solução não trivial (esta seria $\{v\}$ = {0}), é necessário que se anule o determinante da matriz [K - p^2M]. Logo a determinação de frequências e modos de vibração resulta num problema tradicional de determinação de valores e vectores próprios, em que os valores próprios representam as frequências e os vectores próprios os modos de vibração. Assim, a cada frequência p_n corresponde um modo de vibração $\{v_n\}$.

3 Condições de ortogonalidade

Os vectores que representam os modos de vibração apresentam um conjunto de propriedades designadas por condições de ortogonalidade e que são traduzidas nas seguintes equações:

$$\{v_n\}^T\,[\,M\,]\,\{v_m\} = 0 \qquad m \neq n \tag{12}$$

que representa a ortogonalidade em relação à matriz de massa, e

$$\{v_n\}^T\,[\,K\,]\,\{v_m\} = 0 \qquad m \neq n \tag{13}$$

que se refere à ortogonalidade em relação à matriz de rigidez.

Para demonstrar a ortogonalidade em relação à matriz de massa considere-se a equação (11) escrita para os modos de vibração **n** e **m**:

$$[\,K\,]\,\{v_n\} = p_n^2\,[\,M\,]\,\{v_n\} \tag{14}$$

$$[\,K\,]\,\{v_m\} = p_m^2\,[\,M\,]\,\{v_m\} \tag{15}$$

Multiplicando a equação (14) por $\{v_m\}^T$, obtem-se:

$$\{v_m\}^T\,[\,K\,]\,\{v_n\} = p_n^2\,\{v_m\}^T\,[\,M\,]\,\{v_n\} \tag{16}$$

Transpondo a equação (15) e tendo em conta que as matrizes [K] e [M] são simétricas, logo verificando-se as seguintes relações $[K]^T = [K]$ e $[M]^T = [M]$, obtem-se a seguinte expressão:

$$\{v_m\}^T\,[\,K\,] = p_m^2\,\{v_m\}^T\,[\,M\,] \tag{17}$$

Multiplicando à direita por $\{v_n\}$ obtem-se um expressão semelhante à equação (16):

$$\{v_m\}^T\,[\,K\,]\,\{v_n\} = p_m^2\,\{v_m\}^T\,[\,M\,]\,\{v_n\} \tag{18}$$

Se se subtrair a equação (18) da equação (16) é-se conduzido ao seguinte resultado:

$$(\,p_n^2 - p_m^2)\{v_m\}^T\,[\,M\,]\,\{v_n\} = 0 \qquad m \neq n \tag{19}$$

Este resultado demonstra o que se entende por ortogonalidade dos modos de vibração em relação à matriz de massa, já que p_n e p_m são diferentes.

De forma semelhante é possível demonstrar a propriedade de ortogonalidade dos modos de vibração em relação à matriz de rigidez.

A partir das condições de ortogonalidade é possível estabelecer as seguintes relações:

$$[\,V\,]^T\,[\,M\,]\,[\,V\,] = [\,M_G\,] \tag{20}$$

$$[\,V\,]^T\,[\,K\,]\,[\,V\,] = [\,K_G\,] \tag{21}$$

[V] – matriz modal (cada coluna é um modo de vibração)

Como consequência das condições de ortogonalidade as matrizes $[M_G]$ e $[K_G]$ são matrizes diagonais.

É também fácil de demonstrar que, se os modos de vibração são ortogonais às matrizes de massa e de rigidez, também o serão em relação a qualquer matriz que resulte da combinação linear daquelas duas.

4 Normalização dos modos de vibração

Os modos de vibração representam somente a configuração da estrutura quando esta vibra com determinada frequência. Assim, o valor absoluto das componentes que constituem o vector modo de vibração não tem qualquer significado, sendo somente importante a relação entre eles. Desta forma existem infinitas representações possíveis do mesmo modo de vibração. Face a esta situação é habitual representar os modos de vibração através duma determinada norma que facilite a interpretação e a comparação entre eles.

Uma das formas mais simples de normalizar os modos é considerar o maior valor do vector igual à unidade. Outra é considerar sempre igual à unidade o mesmo elemento dos vários vectores dos modos de vibração. Qualquer uma destas formas de normalização tem vantagens e desvantagens que não importa aqui referir.

A forma de normalização dos modos de vibração mais usada, essencialmente em virtude das simplificações na representação da equação de movimento, é a normalização em relação à matriz de massa. Esta normalização consiste em considerar os modos de vibração escritos de tal forma que permita obter a seguinte relação:

$$\{f_n\}^T [\,\mathrm{M}\,]\, \{f_n\} = 1 \tag{22}$$

Recordando que cada um dos termos da matriz diagonal [$\mathrm{M_G}$], apresentada na equação (20) é obtido através da relação,

$$\{v_n\}^T [\,\mathrm{M}\,]\, \{v_n\} = \mathrm{M}_{\mathrm{G}n} \tag{23}$$

pode-se concluir que, para obter a normalização pretendida basta aplicar a seguinte relação ao vector que representa a configuração modal:

$$\{f_n\} = \frac{\{v_n\}}{\sqrt{\mathrm{M}_{\mathrm{G}n}}} = \frac{\{v_n\}}{\sqrt{\{v_n\}^T [\,\mathrm{M}\,]\, \{v_n\}}} \tag{24}$$

Como consequência desta normalização verifica-se a seguinte igualdade:

$$[\,f\,]^T [\,\mathrm{M}\,]\, [\,f\,] = [\,\mathrm{I}\,] \tag{25}$$

$[\,f\,]$ - matriz de modal (matriz com os modos normalizados);
$[\,\mathrm{I}\,]$ - matriz identidade.

A partir desta normalização também é possível obter um outro resultado importante, desta vez envolvendo a matriz de rigidez na forma [$\mathrm{K_G}$], matriz que resulta da operação descrita em (21). Se se tomar a equação (14) e multiplicar ambos os membros pela transposta do modo de vibração, admitindo que este está na sua forma normalizada, obtem-se a seguinte relação:

$$\{f_n\}^T [\,\mathrm{K}\,]\, \{f_n\} = p_n^2\, \{f_n\}^T [\,\mathrm{M}\,]\, \{f_n\} \tag{26}$$

Considerando a condição apresentada em (22), e relembrando a designação indicada na equação (21), demonstra-se que,

$$\{f_n\}^T [\,\mathrm{K}\,]\, \{f_n\} = p_n^2 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{K}_{\mathrm{G}n} = p_n^2 \tag{27}$$

ou seja, que cada elemento da matriz diagonal [$\mathrm{K_G}$], representa o quadrado da frequência de vibração do modo de vibração correspondente, desde que os modos estejam normalizados à matriz de massa.

5 Definição de coordenadas modais

O sistema de equações de equilíbrio dinâmico traduzido pela expressão (5), é um sistema de equações diferenciais. Estas equações são dependentes entre si pois, duma forma geral, a matriz de rigidez [K] tem termos fora da diagonal, e nada obriga a que a matriz de massa [M] seja uma matriz diagonal (recorde-se que a matriz de massa [M] é na maioria dos casos uma matriz diagonal porque normalmente se opta por considerar um sistema com distribuição discreta de massas, ou seja massas concentradas).

É possível, no entanto, através duma mudança de referencial a após algumas transformações, representar o mesmo sistema de equações diferencias de forma a que estas sejam independentes entre si, facilitando muito a resolução do problema. De seguida são apresentados, e justificados, os passos que levam à representação do sistema de equações num novo referencial, o referencial das coordenadas modais.

Se se multiplicar ambos os termos da equação (5) pela transposta da matriz modal, e se introduzir o produto indicado pela expressão (29), que constitui um elemento neutro do produto matricial, o sistema de equilíbrio dinâmico pode ser descrito na forma representada pela expressão (30).

$$[\,M\,]\,\{\ddot{q}(t)\} + [\,C\,]\,\{\dot{q}(t)\} + [\,K\,]\,\{q(t)\} = \{p(t)\} \tag{5}$$

$$[\,f\,]^T[\,M\,]\,\{\ddot{q}(t)\} + [\,f\,]^T[\,C\,]\,\{\dot{q}(t)\} + [\,f\,]^T[\,K\,]\,\{q(t)\} = [\,f\,]^T\{p(t)\} \tag{28}$$

$$[\,f\,]\,[\,f\,]^{-1} = [\,I\,] \tag{29}$$

$$\begin{aligned}&[\,f\,]^T[\,M\,][\,f\,]\,[\,f\,]^{-1}\{\ddot{q}(t)\} + [\,f\,]^T[\,C\,][\,f\,]\,[\,f\,]^{-1}\{\dot{q}(t)\} + \\ &\quad + [\,f\,]^T[\,K\,][\,f\,]\,[\,f\,]^{-1}\{q(t)\} = [\,f\,]^T\{p(t)\}\end{aligned} \tag{30}$$

Substituindo os resultados expressos em (25) e (27), que resultam das propriedades de ortogonalidade dos modos de vibração e da normalização destes em relação à matriz de massa, obtem-se a seguinte expressão:

$$[\,I\,]\,[\,f\,]^{-1}\{\ddot{q}(t)\} + [\,f\,]^T[\,C\,][\,f\,]\,[\,f\,]^{-1}\{\dot{q}(t)\} + [\,p^2\,]\,[\,f\,]^{-1}\{q(t)\} = [\,f\,]^T\{p(t)\} \tag{31}$$

$[\,I\,]$ – matriz identidade;
$[\,p^2\,]$ – matriz diagonal em que cada elemento representa o quadrado da frequência do modo correspondente à posição do elemento na matriz.

Se se admitir a hipótese de que é possível obter a matriz de amortecimento numa forma tal que verifique as condições de ortogonalidade modal (32), à semelhança do que acontece com as matrizes de massa e de rigidez, a expressão (31) pode ser simplificada. À semelhança do que acontecia coma as matrizes $[M_G]$ e $[K_G]$, a matriz $[C_G]$ é uma matriz diagonal. Cada um dos elementos da matriz $[C_G]$ representa o amortecimento do correspondente modo. Se os modos de vibração estiverem normalizados à matriz de massa, então a matriz de amortecimento diagonal $[C_G]$ toma a forma apresentada na equação (33).

$$[\,V\,]^T [\,C\,]\,[\,V\,] = [\,C_G\,] \tag{32}$$

$$[\,f\,]^T [\,C\,]\,[\,f\,] = [\,2\,p\,\zeta\,] \quad \text{(matriz diagonal)} \tag{33}$$

ζ – percentagem do amortecimento crítico modal do modo correspondente à posição do elemento na matriz;

p - frequência do modo de vibração correspondente à posição do elemento na matriz.

Introduzindo esta nova representação da matriz de amortecimento na equação (31), as equações de movimento dinâmico tomam o seguinte aspecto:

$$[\,I\,]\,[\,f\,]^{-1}\{\ddot{q}(t)\} + [\,2\,p\,\zeta\,]\,[\,f\,]^{-1}\{\dot{q}(t)\} + [\,p^2\,]\,[\,f\,]^{-1}\{q(t)\} = [\,f\,]^T\,\{p(t)\} \tag{34}$$

Este conjunto de equações está referido aos graus de liberdade dinâmicos da estrutura representados pelo vector $\{q(t)\}$, envolvendo ainda as suas derivadas no tempo. Se se interpretar o produto da matriz $[\,f\,]^{-1}$ pelo vector $\{q(t)\}$ como uma operação de transformação de coordenadas (ver figura 1), então pode imaginar-se um novo referencial que se designa por referencial das coordenadas modais ou generalizadas, $\{q_G(t)\}$. Neste referencial, o sistema de equações de equilíbrio dinâmico tem um aspecto mais simples, que se descreve de seguida:

$$[\,I\,]\{\ddot{q}_G(t)\} + [\,2\,p\,\zeta\,]\{\dot{q}_G(t)\} + [\,p^2\,]\{q_G(t)\} = [\,f\,]^T\,\{p(t)\} \tag{35}$$

$$\{q_G(t)\} = [\,f\,]^{-1}\{q(t)\} \quad \text{(transformação para coordenadas modais)} \tag{36}$$

$$\{q(t)\} = [\,f\,]\{q_G(t)\} \quad \text{(transformação para as coordenadas da estrutura)} \tag{37}$$

De acordo com o que foi exposto anteriormente, todas as matrizes envolvidas neste sistema de equações são matrizes diagonais. Deste modo o sistema de equações representado é um sistema de equações diferenciais independentes, podendo ser representado, para cada modo de vibração:

$$\ddot{q}_{Gn}(t) + 2\,p_n\,\zeta_n\,\dot{q}_{Gn}(t) + p_n^2\,q_{Gn}(t) = \{\,f\,\}_n^T\,\{p(t)\} \quad \text{para o modo } n \tag{38}$$

A resolução deste sistema de equações permite obter a solução do problema dinâmico expressa em termos das coordenadas modais. Se se pretender obter a solução referida ao referencial dos graus de liberdade dinâmicos da estrutura é necessário fazer a transformação de coordenadas representada pela equação (37). A semelhança entre as equações (38) e a equação de equilíbrio dinâmico de um sistema de um grau de liberdade, representada em (39), é evidente. É tirando partido desta semelhança que é possível obter a solução para um sistema de múltiplos graus de liberdade a partir da solução para sistemas de um grau de liberdade.

$$\ddot{q}(t) + 2\,p\,\zeta\,\dot{q}(t) + p^2\,q(t) = p(t) \tag{39}$$

[f] – Matriz modal

$$[f] = \begin{bmatrix} 0.1368 & 0.5743 & -0.8072 \\ 0.4650 & 0.6822 & 0.5642 \\ 0.8747 & -0.4525 & -0.1737 \end{bmatrix} \qquad [f]^{-1} = \begin{bmatrix} 0.1368 & 0.4650 & 0.8747 \\ 0.5743 & 0.6822 & -0.4525 \\ -0.8072 & 0.5642 & -0.1737 \end{bmatrix}$$

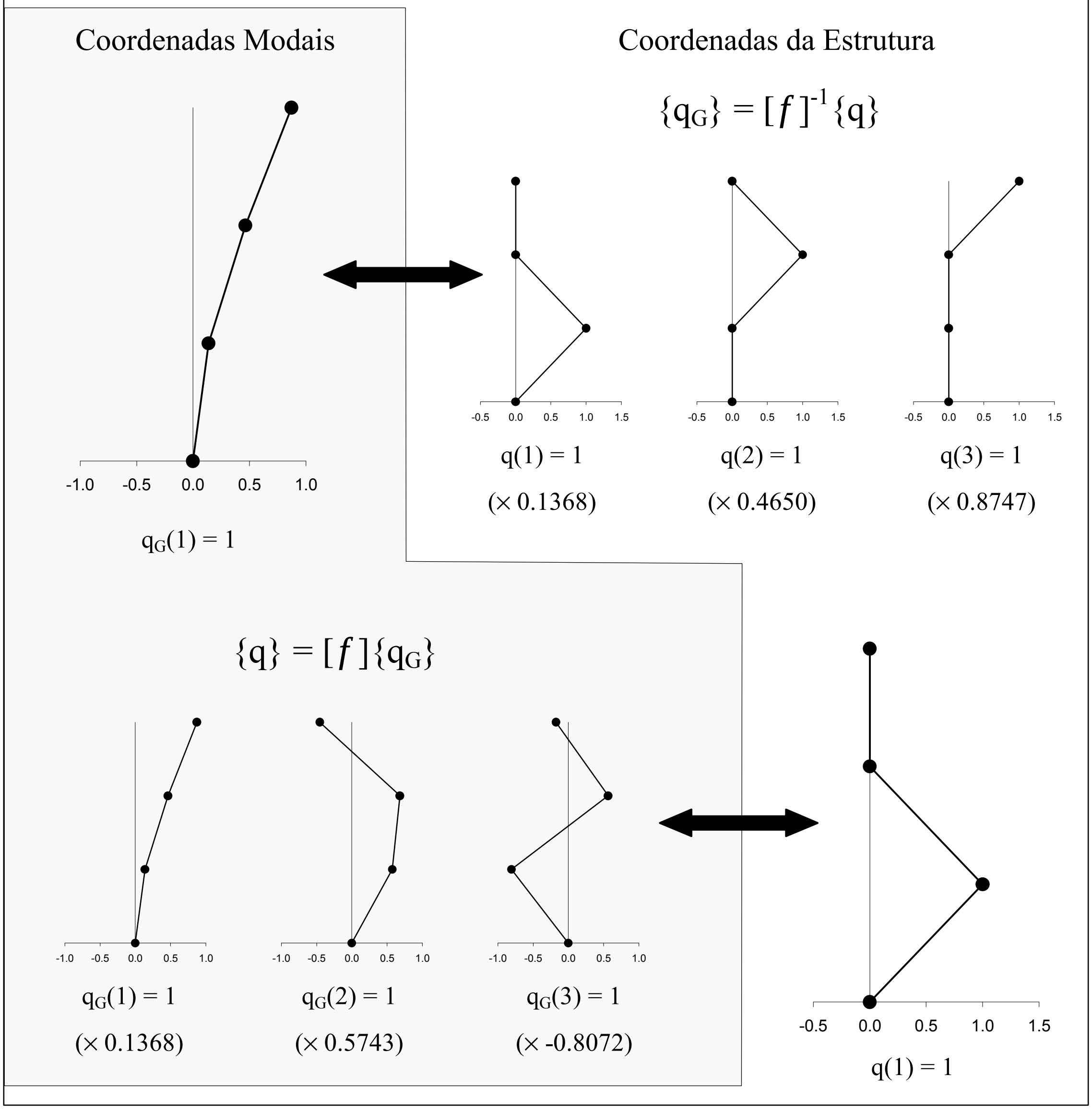

Figura 1 – Transformação de coordenadas da estrutura para coordenadas modais e vice-versa. Exemplo com estrutura com 3 graus de liberdade.

Neste texto optou-se por fazer a apresentação de toda a formulação referente à representação das equações de equilíbrio dinâmico em coordenadas modais utilizando os vectores das configurações modais normalizados à matriz de massa. Convém referir que tal não é necessário, sendo no entanto preferível pois o sistema de equações fica mais simples e é mais fácil de interpretar o significado físico dos vários elementos envolvidos. Se for utilizada qualquer outra normalização modal, sem ser a normalização à matriz de massa, o sistema de equações de equilíbrio dinâmico toma o seguinte aspecto:

$$[\, M_G \,]\{\ddot{q}_G(t)\} + [\, C_G \,]\{\dot{q}_G(t)\} + [\, K_G \,]\{q_G(t)\} = [\, f \,]^T \{p(t)\} \tag{40}$$

$$\{q_G(t)\} = [\, V \,]^{-1}\{q(t)\} \quad \text{(transformação para coordenadas modais)} \tag{41}$$

$$\{q(t)\} = [\, V \,]\{q_G(t)\} \quad \text{(transformação para as coordenadas da estrutura)} \tag{42}$$

6 Análise da resposta dinâmica por sobreposição modal

6.1 Resposta em regime livre

As equações de movimento em regime livre de um sistema de múltiplos graus de liberdade referida ao sistema de coordenadas modais, têm o seguinte aspecto:

$$\ddot{q}_{Gn}(t) + 2\, p_n\, \zeta_n\, \dot{q}_{Gn}(t) + p_n^2\, q_{Gn}(t) = 0 \quad \text{para o modo } n \tag{43}$$

A resposta de um sistema de um grau de liberdade, em regime livre e com amortecimento sub-crítico ($\zeta < 1$), é traduzida por:

$$q(t) = e^{-\zeta p t} \left(\frac{\dot{q}(0) + \zeta\, p\, q(0)}{p_d} \operatorname{sen}(p_d\, t) + q(0) \cos(p_d\, t) \right) \tag{44}$$

com,

$$p_d = p\sqrt{1-\zeta^2} \tag{45}$$

p_d - frequência amortecida;
$q(0)$ - deslocamento inicial (no instante t=0);
$\dot{q}(0)$ - velocidade inicial (no instante t=0).

Por analogia, a resposta dum sistema de múltiplos graus de liberdade será a seguinte, para cada uma das coordenadas modais:

$$q_{Gn}(t) = e^{-\zeta p_n t} \left(\frac{\dot{q}_{Gn}(0) + \zeta\, p_n\, q_{Gn}(0)}{p_{dn}} \operatorname{sen}(p_{dn}\, t) + q_{Gn}(0) \cos(p_{dn}\, t) \right) \tag{46}$$

É preciso ter em atenção que as condições inicias do movimento indicadas na equação (46) estão referidas ao sistema de coordenadas modais. Como muito provavelmente o que se conhece são as condições iniciais do movimento relativamente aos graus de liberdade da estrutura, é necessário fazer a correspondente transformação de coordenadas para obter estas condições iniciais referidas ao sistema de coordenadas modais.

$$\{q_G(0)\} = [\, f \,]^{-1}\{q(0)\} \quad \text{(transformação para coordenadas modais)} \tag{47}$$

Após o calculo da resposta nas coordenadas modais é necessário fazer a transformação de coordenadas para obter a resposta expressa em termos das coordenadas da estrutura.

6.2 Resposta a uma força de excitação harmónica

Para a análise da resposta dinâmica de um oscilador de múltiplos graus de liberdade em regime forçado, pode-se considerar o sistema de equações representado em (38).

$$\ddot{q}_{Gn}(t) + 2\, p_n\, \zeta_n\, \dot{q}_{Gn}(t) + p_n^{\,2}\, q_{Gn}(t) = \{f\}_n^{T}\, \{p(t)\} \quad \text{para o modo } n \tag{38}$$

Se as forças de excitação que compõem o vector de forças {p(t)} forem excitações harmónicas, a resposta pode ser calculada através das funções de amplificação dinâmica b_1 definidas para osciladores de um grau de liberdade. Estas funções permitem calcular a amplitude da resposta em regime forçado de um oscilador de um grau de liberdade, com massa unitária, sujeito a uma excitação harmónica de frequência ω e a respectiva fase θ.

$$q(t) = b_1 \frac{P}{p^2} \cos(\omega t - \theta) \tag{48}$$

$$b_1 = \frac{1}{\sqrt{(1 - \bar{\omega}^2)^2 + (2\,\zeta\,\bar{\omega})^2}} \tag{49}$$

$$q = \operatorname{arctg}\left(\frac{2\,\zeta\,\bar{\omega}}{1 - \bar{\omega}^2}\right) \tag{50}$$

$$\bar{\omega} = \frac{\omega}{p} \tag{51}$$

P - amplitude da força de excitação [$p(t) = P\cos(\omega t)$];

Num sistema de múltiplos graus de liberdade tem de considerar-se a hipótese mais geral de haver forças harmónicas $p_i(t)$, aplicadas em todos os graus de liberdade da estrutura. Assim, o termo da direita da equação (38) pode tomar a seguinte forma:

$$\{f\}_n^{T}\,\{p(t)\} = \sum_{i=1}^{m} f_{in}\, P_i \cos(\omega_i t) \tag{52}$$

f_{in} - componente *i* do modo de vibração *n*;
P_i - amplitude da força harmónica aplicada no grau de liberdade *i* da estrutura;
ω_i - frequência da força harmónica aplicada no grau de liberdade *i* da estrutura;
m - número total de modos de vibração (ou de graus de liberdade dinâmicos da estrutura).

A resposta no modo de vibração *n* de um sistema de *m* graus de liberdade é traduzida pela seguinte equação:

$$q_{Gn}(t) = \sum_{i=1}^{m} f_{in}\, b_{1in} \frac{P_i}{p_n^2} \cos(\omega_i t - \theta_{in}) \tag{53}$$

$$b_{1in} = \frac{1}{\sqrt{(1 - \bar{\omega}_{in}^2)^2 + (2\,\zeta_n\,\bar{\omega}_{in})^2}} \tag{54}$$

$$q_{in} = \mathrm{arctg}\left(\frac{2\,\zeta_n\,\bar{\omega}_{in}}{1 - \bar{\omega}_{in}^2}\right) \tag{55}$$

$$\bar{\omega}_{in} = \frac{\omega_i}{p_n} \tag{56}$$

Após o calculo da resposta nas coordenadas modais é necessário fazer a transformação de coordenadas para obter a resposta expressa em termos das coordenadas da estrutura.

6.3 Resposta a uma força não periódica

A análise de um sistema de múltiplos graus de liberdade sujeito a um conjunto de forças não periódicas pode ser feita utilizando o integral de Duhamel. A resposta de um oscilador de um grau de liberdade, com massa unitária, a uma força Q(t) qualquer, é traduzida através da seguinte equação:

$$q(t) = e^{-\zeta p t}\left(\frac{\dot{q}(0) + \zeta\, p\, q(0)}{p_d}\,\mathrm{sen}(p_d\, t) + q(0)\cos(p_d\, t)\right) +$$

$$+ \frac{e^{-\zeta p t}}{p_d}\int_0^t e^{\zeta p \tau}\, Q(\tau)\,\mathrm{sen}\,(p_d(t - \tau))\, d\tau \tag{57}$$

com,

$$p_d = p\sqrt{1-\zeta^2} \tag{45}$$

p_d	-	frequência amortecida;
q(0)	-	deslocamento inicial (no instante t=0);
$\dot{q}(0)$	-	velocidade inicial (no instante t=0);
Q(t)	-	força aplicada.

A equação (57) permite calcular a resposta de um oscilador de um grau de liberdade sujeito a uma força dinâmica Q(t) considerando a influência de condições iniciais do movimento. Como a análise da resposta de uma estrutura em regime livre sujeita a condições iniciais já foi abordada na secção 6.1, nesta secção será somente calculada a resposta à força aplicada Q(t). Assim a equação (57) pode simplificar-se:

$$q(t) = \frac{e^{-\zeta p t}}{p_d}\int_0^t e^{\zeta p \tau}\, Q(\tau)\,\mathrm{sen}\,(p_d(t - \tau))\, d\tau \tag{58}$$

Como já foi referido na secção anterior, a equação (38), que representa a equação de equilíbrio dinâmico para um determinado grau de liberdade, pode ser resolvida tirando partido da analogia desta equação com a equação de um sistema de um grau de liberdade. Se se assumir que existem forças $Q_i(t)$ aplicadas em todos os graus de liberdade, o termo da direita da equação (38) toma o seguinte aspecto:

$$\{f\}_n^T \{p(t)\} = \sum_{i=1}^{m} f_{in}\, Q_i(t) \tag{59}$$

f_{in} - componente *i* do modo de vibração *n*;
$Q_i(t)$ - força aplicada no grau de liberdade *i* da estrutura;

A resposta no modo de vibração *n* de um sistema de *m* graus de liberdade é traduzida pela seguinte equação:

$$q_{Gn}(t) = \frac{\exp(-\zeta_n p_n t)}{p_{dn}} \sum_{i=1}^{m} \left[\int_0^t \exp(\zeta_n p_n \tau)\, f_{in}\, Q_i(\tau)\, \mathrm{sen}(p_{dn}(t-\tau))\, d\tau\right] \tag{60}$$

Após o calculo da resposta nas coordenadas modais é necessário fazer a transformação de coordenadas para obter a resposta expressa em termos das coordenadas da estrutura.

6.4 Resposta a um conjunto de acelerações na base

A formulação que permite o cálculo da resposta de um sistema de múltiplos graus de liberdade a um conjunto de acelerações no solo é semelhante à formulação utilizada para o cálculo da resposta a um conjunto de forças de excitação, desde que se escrevam as equações em coordenadas relativas. Neste contexto entende-se como coordenadas relativas aquelas que permitem descrever o movimento da estrutura em relação ao movimento do solo.

$$q_r(t) = q(t) - q_s(t) \tag{61}$$

$q_r(t)$ - deslocamento relativo;
$q(t)$ - deslocamento absoluto;
$q_s(t)$ - deslocamento do solo.

Como só a parcela correspondente às forças de inércia $\{f_I\}$ depende das coordenadas absolutas, para um sistema de múltiplos graus de liberdade o sistema de equações de equilíbrio dinâmico toma o seguinte aspecto, quando escrito em coordenadas relativas:

$$[\,M\,]\,\{\ddot{q}_r(t)\} + [\,C\,]\,\{\dot{q}_r(t)\} + [\,K\,]\,\{q_r(t)\} = -[\,M\,]\,\{\ddot{q}_s(t)\} \tag{62}$$

É habitual omitir na representação das equações o facto de se tratarem de coordenadas relativas, representando as equações na seguinte forma:

$$[\,M\,]\,\{\ddot{q}(t)\} + [\,C\,]\,\{\dot{q}(t)\} + [\,K\,]\,\{q(t)\} = -[\,M\,]\,\{\ddot{q}_s(t)\} \tag{63}$$

Para que a formulação apresentada fique clara é necessário definir o que representa o vector das acelerações do solo $\{\ddot{q}_s(t)\}$. Duma forma geral todos os pontos de ligação da estrutura ao exterior podem ter deslocamentos independentes uns dos outros. Como esta situação é pouco provável que aconteça em estruturas de dimensões correntes, admite-se a hipótese de haver somente três deslocamentos independentes da base, um em cada direcção ($q_{sx}(t)$, $q_{sy}(t)$ e $q_{sz}(t)$).

Ao introduzir estes deslocamentos do solo na equação (63) só faz sentido considerar cada um deles nas posições do vector $\{\ddot{q}_s(t)\}$ correspondentes às respectivas direcções. Assim, se se pretende considerar um movimento no solo segundo a direcção X, deverá ser considerado um vector $\{\ddot{q}_s(t)\}$, com valor diferente de zero somente nos graus de liberdade segundo X. Uma forma prática de construir um vector de acelerações no solo com estas características, e que seja válida se se admitir que, em cada direcção, todos os pontos da base da estrutura têm o mesmo deslocamento, é criar para cada direcção um vector com valor unitário nas posições correspondentes à direcção desejada e zero nas restantes. Serão assim construídos três vectores, sendo um para cada uma das direcções.

$\{\mathbf{1}_x\}$ - vector com valores unitários nas posições correspondentes à direcção X e zero nas restantes;

$\{\mathbf{1}_y\}$ - vector com valores unitários nas posições correspondentes à direcção Y e zero nas restantes;

$\{\mathbf{1}_z\}$ - vector com valores unitários nas posições correspondentes à direcção Z e zero nas restantes;

Desta forma, para construir o vector de acelerações no solo para, por exemplo a direcção X, basta multiplicar o vector $\{\mathbf{1}_x\}$ pela aceleração no solo segundo X, $\ddot{q}_{sx}(t)$. Com base nestes pressupostos a equação (63) poderá ser alterada e, na hipótese de se considerarem movimentos no solo em todas as direcções, tomará a seguinte forma:

$$[M]\{\ddot{q}(t)\} + [C]\{\dot{q}(t)\} + [K]\{q(t)\} =$$

$$= -[M](\{\mathbf{1}_x\}\ddot{q}_{sx}(t) + \{\mathbf{1}_y\}\ddot{q}_{sy}(t) + \{\mathbf{1}_z\}\ddot{q}_{sz}(t)) \tag{64}$$

Particularizando a equação somente para o caso de movimentos no solo segundo a direcção X, e referindo a equação às coordenadas modais, admitindo configurações modais normalizados à matriz de massa, a equação (64) transforma-se na seguinte:

$$[\ I\ ]\{\ddot{q}_G(t)\} + [\ 2\,p\,\zeta\ ]\{\dot{q}_G(t)\} + [\ p^2\ ]\{q_G(t)\} = -\ [\,f\,]^T\,[M]\{\mathbf{1}_x\}\ddot{q}_{sx}(t) \tag{65}$$

Esta equação é semelhante à equação (35) definida anteriormente. Como o sistema de equações representado em (65) é um sistema de equações diferenciais independentes, pode ser representada, para cada modo de vibração, pela seguinte equação:

$$\ddot{q}_{Gn}(t) + 2\,p_n\,\zeta_n\,\dot{q}_{Gn}(t) + p_n^2\,q_{Gn}(t) = -\{\,f\,\}_n^T\,[M]\{\mathbf{1}_x\}\ddot{q}_{sx}(t) \quad \text{para o modo } n \tag{66}$$

No termo da direita da equação (66), o factor que multiplica a aceleração do solo é habitualmente designado por *Factor de Participação Modal*, para a direcção em que actua essa aceleração.

$$\{f\}_n^T [M]\{\mathbf{1}_x\} = P_{nx} \qquad \text{(Factor de participação do modo } n \text{ segundo } x) \qquad (67)$$

A semelhança entre a equação (66) e a equação (38) revela que a resolução do problema dinâmico de imposição de acelerações na base pode ser resolvido da mesma forma que o problema da imposição de forças dinâmicas nos graus de liberdade da estrutura. As soluções indicadas nas secções anteriores para o problema das forças impostas podem ser utilizadas no cálculo da resposta a acelerações na base, desde que se faça a seguinte substituição:

$$\{p(t)\} = - [M]\{\mathbf{1}_x\}\ddot{q}_{sx}(t) \quad \text{(para acelerações no solo segundo X)} \qquad (68)$$

Esta substituição é válida para qualquer direcção da aceleração imposta na base, e se houver movimento imposto em mais do que uma direcção a resposta total pode ser calculada por sobreposição da resposta em cada uma das direcções, tal como é sugerido na expressão (64).

Nesta secção assumiu-se que o movimento do solo era representado através dum conjunto de acelerações ao longo do tempo. Todo este problema pode no entanto ser reformulado para resolver o mesmo problema mas com o movimento do solo descrito através da evolução dos deslocamentos ao longo do tempo.

7 Análise sísmica por espectros de resposta

Designa-se por análise sísmica duma estrutura a análise da resposta dessa estrutura quando solicitada por um movimento na base representativo duma acção sísmica.

Na secção 6.4 foi apresentada a metodologia necessária para a resolução deste problema quando a acção sísmica é representada através duma série de acelerações ao longo do tempo. No entanto, na maioria dos casos em que se pretende fazer a análise sísmica de estruturas com comportamento linear, o objectivo não é conhecer a evolução da resposta ao longo do tempo, mas apenas calcular os valores extremos desta resposta. Nestes casos é mais prático recorrer a uma análise sísmica por espectros de resposta.

Espectro de resposta pode ser definido como a representação gráfica do valor máximo da resposta (medida em termos de deslocamento, aceleração, esforços, etc.) de um conjunto de osciladores de um grau de liberdade, quando solicitados por uma determinada acção sísmica. Estes valores máximos são representados em função da frequência própria dos osciladores (ou do seu período) e do valor do coeficiente de amortecimento considerado.

Recorde-se a equação de equilíbrio dinâmico para um oscilador de um grau de liberdade sujeito a um movimento na base,

$$\ddot{q}(t) + 2\,p\,\zeta\,\dot{q}(t) + p^2\,q(t) = -\,\ddot{q}_s(t) \qquad (69)$$

Se se conhecer, por exemplo, o espectro de resposta de acelerações compatível com a série de acelerações imposta na base ($\ddot{q}_s(t)$), então o valor máximo da resposta do oscilador pode ser obtida directamente a partir do espectro. O valor pretendido será a ordenada do espectro correspondente à frequência própria p do oscilador e ao seu amortecimento traduzido através de ζ.

$$\ddot{q}_{max} = S_a\,(p, \zeta) \tag{70}$$

$S_a\,(p, \zeta)$ - valor do espectro de resposta de acelerações, para a frequência p e coeficiente de amortecimento ζ.

Se se comparar a equação (69) com a equação (66), que traduz o equilíbrio dinâmico para um determinado modo de vibração, verifica-se que, a menos de um factor de escala que multiplica as acelerações na base, estas duas equações são iguais. Este factor de escala corresponde ao Factor de Participação Modal atrás referido.

$$\ddot{q}_{Gn}(t) + 2\, p_n\, \zeta_n\, \dot{q}_{Gn}(t) + p_n^2\, q_{Gn}(t) = -\{ f \}_n^T\, [M]\{\mathbf{1}_x\}\ddot{q}_{sx}(t) \tag{66}$$

$$\{ f \}_n^T\, [M]\{\mathbf{1}_x\} = P_{nx} \tag{67}$$

$$\ddot{q}_{Gn}(t) + 2\, p_n\, \zeta_n\, \dot{q}_{Gn}(t) + p_n^2\, q_{Gn}(t) = -\; P_{nx}\, \ddot{q}_{sx}(t) \quad \text{para o modo } n \tag{71}$$

Se as duas equações só diferem dum factor de escala que afecta a solicitação, então, visto estarmos a trabalhar em regime linear, a solução também corresponderá à solução obtida para um sistema de um grau de liberdade afectada do mesmo factor de escala, ou seja:

$$(\ddot{q}_{Gn})_{max} = P_{nx}\, S_{ax}\,(p_n, \zeta_n) \tag{72}$$

$S_{ax}\,(p, \zeta)$ - espectro de resposta de acelerações para a direcção X.

O valor $(\ddot{q}_{Gn})_{max}$ corresponde ao valor máximo da aceleração na coordenada generalizada correspondente ao modo de vibração *n*. Desta forma é possível calcular os valores máximos de aceleração correspondentes a todos os modos de vibração.

De forma idêntica se poderiam calcular a resposta em termos de deslocamentos ou velocidades, para isso bastando ter acesso aos espectros de resposta correspondentes.

$$(\dot{q}_{Gn})_{max} = P_{nx}\, S_{vx}\,(p_n, \zeta_n) \tag{73}$$

$$(q_{Gn})_{max} = P_{nx}\, S_{dx}\,(p_n, \zeta_n) \tag{74}$$

$S_{vx}\,(p, \zeta)$ - espectro de resposta de velocidades para a direcção X.
$S_{dx}\,(p, \zeta)$ - espectro de resposta de deslocamentos para a direcção X.

Os valores representados nas equações (72), (73) e (74), correspondem à resposta em coordenadas modais. Para obter a resposta de cada modo nas coordenadas da estrutura é necessário proceder à respectiva transformação de coordenadas traduzida pela a equação (37):

$$\{q_n\}_{max} = \{f_n\}(q_{Gn})_{max} = \{f_n\}P_{nx}\, S_{dx}\,(p, \zeta) \tag{75}$$

$$\{\dot{q}_n\}_{max} = \{f_n\}(\dot{q}_{Gn})_{max} = \{f_n\}P_{nx}\, S_{vx}\,(p, \zeta) \tag{76}$$

$$\{\ddot{q}_n\}_{max} = \{f_n\}(\ddot{q}_{Gn})_{max} = \{f_n\}P_{nx}\, S_{ax}\,(p, \zeta) \tag{77}$$

Para cada modo de vibração, os valores máximos da resposta da estrutura relativos a uma grandeza qualquer, podem ser calculados a partir dos vectores de deslocamento, velocidade ou acelerações obtidos através das três equações anteriores.

Seguidamente coloca-se o problema de como obter um valor aceitável da resposta global da estrutura ou seja, como é que devem ser combinados os resultados obtidos para cada um dos modos. A hipótese de somar os valores máximos de cada uma das respostas modais corresponde de certeza a um limite superior da resposta global e com baixa probabilidade de ocorrência, pois é muito pouco provável que os valores máximos da resposta em cada modo ocorram simultaneamente.

Uma das regras de combinação modal mais utilizadas é a "Raiz Quadrada da Soma dos Quadrados" (RQSQ). De acordo com esta regra o valor máximo da resposta de uma determinada grandeza pode ser estimado através da raiz quadrada da soma dos quadrados da resposta dessa grandeza em cada modo:

$$G \approx \sqrt{\sum_{n=1}^{m} (G_n)^2} \tag{78}$$

Esta regra de combinação modal dá bons resultados desde que as frequências dos vários modos estejam suficientemente afastadas. Se tal não acontecer, isto é, se houver modos com frequências próximas então é mais adequado utilizar a regra designada por "Combinação Quadrática Completa" (CQC), traduzida pela seguinte equação:

$$G \approx \sqrt{\sum_{n=1}^{m} \sum_{i=1}^{m} \rho_{in}\, G_i\, G_n} \tag{79}$$

$$\rho_{in} = \frac{8\zeta^2\,(1+\beta_{in})\,\beta_{in}^{3/2}}{(1-\beta_{in}^{2})^2 + 4\zeta^2\,\beta_{in}\,(1+\beta_{in})^2} \qquad \text{(coeficiente de correlação)} \tag{80}$$

$$\beta_{in} = \frac{p_i}{p_n} \tag{81}$$

Na figura 2 está representada e evolução do coeficiente de correlação ρ_{in} em função da relação entre frequências β_{in}. Pode-se verificar que, para um amortecimento de 5%, se a relação entre frequências for superior a 1.5 (ou inferior a 0.67, se se tomar a relação inversa), os valores do coeficiente de correlação entre modos diferentes são inferiores a 6%. Para esta gama de valores de β_{in} é irrelevante o uso do CQC, sendo suficiente considerar a regra de combinação pela raiz quadrada da soma dos quadrados (78).

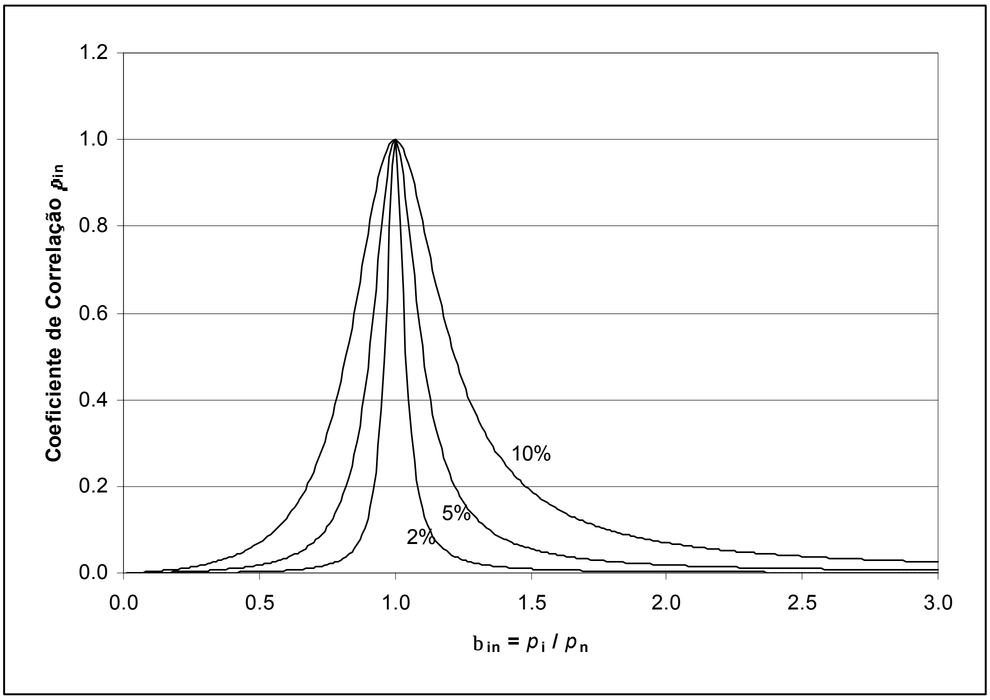

Figura 2 – Variação do coeficiente de correlação ρ_{in} (CQC), com a relação entre frequências β_{in}, para vários valores do coeficiente de amortecimento (2%, 5% e 10%).

A razão pela qual o método CQC garante melhores resultados quando os modos têm frequências próprias próximas, tem a ver com o facto de considerar na combinação o efeito da correlação entre as respostas dos vários modos, enquanto que o método RQSQ assume que estas respostas são independentes. Na realidade se dois modos de vibração tiverem frequências próprias próximas a resposta deles não é independente.

É necessário no entanto realçar que o facto do CQC considerar a correlação entre os modos de vibração não significa que todos os valores resultantes deste tipo de combinação sejam superiores aos que se obteriam com outros métodos de combinação, nomeadamente o RQSQ. Situações em que o CQC conduz a valores inferiores ao RQSQ ocorrem, por exemplo, quando num determinado grau de liberdade, os deslocamentos modais dos modos em combinação têm sinais contrários, o que torna o termo cruzado r_{ij} G_i G_j (i $\neq$ j) negativo. Este tipo de resultado não é afectado de algum modo pela multiplicação da configuração de um dos modos intervenientes por (-1). Esta multiplicação também afectaria necessariamente o Factor de Participação Modal, pelo que o resultado em termos de deslocamentos na estrutura devido ao referido modo de vibração teriam exactamente o valor obtido antes da multiplicação por (-1).

Como foi atrás referido, quer o CQC quer o RQSQ permite calcular o valor máximo da resposta de uma determinada variável. Infelizmente existem muitas situações onde o que se pretende é avaliar a resposta em termos de duas ou mais variáveis simultaneamente como por exemplo, quando se pretende fazer a verificação dos pilares à flexão composta. Neste caso o que se pretende não é conhecer os valores máximos do esforço axial (N) e do momento flector (M), mas sim conhecer a combinação mais desfavorável do par (N,M), sob a condição de que N e M sejam simultâneos.

De acordo com Gupta (Gupta, 1990), o valor provável da variável Y simultâneo com o valor máximo da variável X pode ser calculado através da seguinte relação:

$$\mathrm{Y} = \frac{R_{YX}}{exX} \tag{82}$$

com,

$$R_{YX} = \sum_{\mathrm{n}=1}^{\mathrm{m}} \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{m}} \rho_{\mathrm{in}}\, \mathrm{X_i}\, \mathrm{Y_n} \tag{83}$$

$$exX = \sqrt{\sum_{\mathrm{n}=1}^{\mathrm{m}} \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{m}} \rho_{\mathrm{in}}\, \mathrm{X_i}\, \mathrm{X_n}} \tag{84}$$

X_i e Y_i – valores modais das variáveis X e Y

Nas equações (83) e (84) pressupõe-se a aplicação do método de combinação modal CQC. Para obter as correspondentes equações para o método de combinação RQSQ basta considerar unitário o valor do coeficiente de correlação ρ_{in}.

O mesmo autor conclui que os valores simultâneos da resposta de um conjunto de variáveis reunidas num vector {A} deve obedecer à seguinte condição:

$$\{A\}^T\, [G]^{-1}\, \{A\} = 1 \tag{85}$$

em que a matriz [G] tem o seguinte aspecto:

$$[G] = \begin{bmatrix} (exX_1)^2 & R_{X_iX_2} & \dots & R_{X_iX_n} \\ R_{X_2X_1} & (exX_2)^2 & \dots & R_{X_iX_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ R_{X_nX_1} & R_{X_nX_2} & \dots & (exX_n)^2 \end{bmatrix}$$

8 Referências bibliográficas

Gupta, A.K. – "*Response Spectrum Method in Seismic Analysis and Design of Structures*", CRC Press, Inc., 1992.