

## Identificação Dinâmica de Sistemas Estruturais

### Conceitos gerais

## 1. Introdução

O comportamento dinâmico de estruturas pode ser reproduzido pelas seguintes duas vias alternativas:

- Modelação analítica (ex: Método dos Elementos Finitos);
- Modelação experimental.

Os métodos de **modelação experimental** distinguem-se, quanto à sua natureza e objectivos, nos métodos de **modelação do comportamento linear** e nos métodos de **modelação do comportamento não linear**.

Os métodos de identificação modal<sup>1</sup> destinam-se à identificação das frequências ( $p_k$ ), configurações ( $\Phi_{mk}$ ) e coeficientes de amortecimento modais ( $\zeta_k$ ). Tratam-se de métodos relevantes para o desenvolvimento de **modelos de comportamento linear** para os quais a análise dinâmica por decomposição modal é aplicável.

Os métodos de caracterização do **comportamento não linear** destinam-se à identificação e caracterização dos efeitos

---

<sup>1</sup> *Aqui considerado sinónimo de identificação dinâmica de sistemas estruturais, uma vez que a identificação se encontra dirigida aos designados parâmetros modais (frequências, modos e coeficientes de amortecimento)*

determinantes do comportamento não linear. Dentro destes, é ainda possível distinguir os seguintes métodos:

- Ensaio Quasi-Estáticos;
- Ensaio Pseudo-Dinâmicos;
- Ensaio em Plataforma Sísmica.

### Ensaio quasi-estáticos

Os ensaios quasi-estáticos são realizados sobre ligações, componentes ou sub-estruturas, mobilizando o seu comportamento não linear face a um carregamento convencional imposto estaticamente. A inferência do comportamento sísmico de estruturas assim construídas é realizada, por extrapolação, considerando modelos analíticos de forças de restituição calibradas e/ou validadas com base nos resultados experimentais.

Este método de ensaio faz uso da sub-estruturação, sujeitando-se ao ensaio apenas a parte da estrutura na qual se concentra o comportamento não linear. A Fig. 1.2 ilustra algumas sub-estruturas e correspondentes configurações de ensaio.

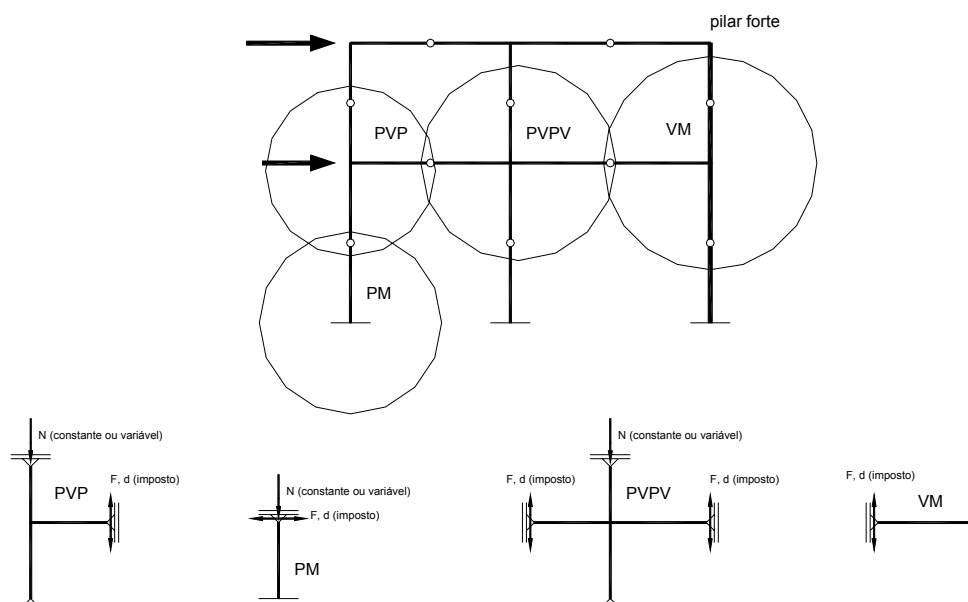


Fig. 1.2 – Estratégia de sub-estruturação e configurações de ensaio.

## Ensaio pseudo-dinâmico

Os ensaios pseudo-dinâmicos constituem uma alternativa relativamente recente aos ensaios quasi-estáticos e ensaios em plataforma sísmica. Neste tipo de ensaios procura-se obter a resposta duma estrutura ou sub-estrutura face a um movimento sísmico de forte intensidade. Trata-se dum método de ensaio híbrido pois, enquanto que as forças de inércia, de amortecimento (viscoso) e o input sísmico são modeladas numericamente, já as forças de restituição  $Q_R(t)$  são modeladas experimentalmente, sendo medidas a partir do modelo físico ensaiado.

$$M\ddot{q}(t) + C\dot{q}(t) + Q_R(q(t)) = -M\ddot{q}_s(t)$$

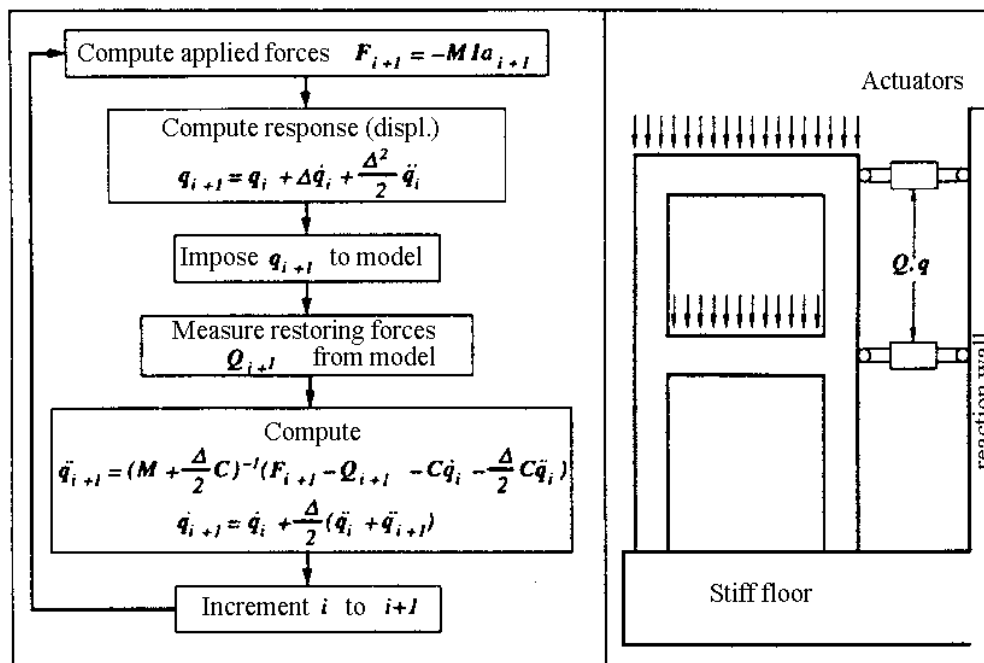


Fig. 1.3 – Esquema de ensaio pseudo-dinâmico

## Ensaio em plataforma sísmica

Os ensaios em plataforma (ou mesa) sísmica constituem sem dúvida o método de ensaio mais esclarecedor do comportamento sísmico de estruturas completas.

Nestes ensaios o modelo físico – vulgarmente sob a forma de uma estrutura completa – é sujeito a um movimento imposto na base de acordo com um acelerograma, natural ou artificialmente gerado. A figura 1.4 ilustra esquematicamente um ensaio uniaxial duma estrutura em pórtico.

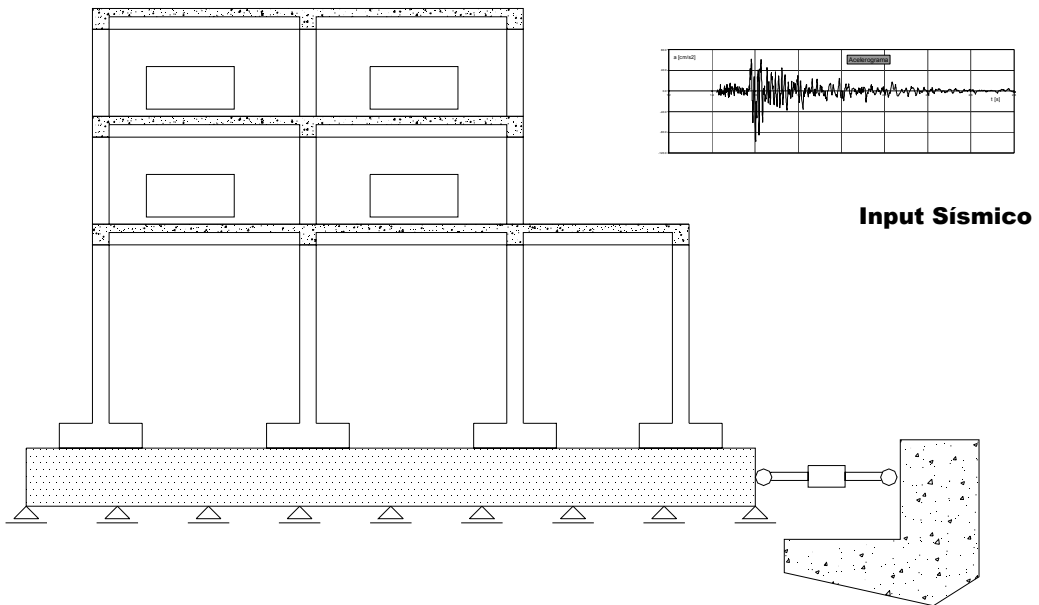


Fig. 1.4 – Esquema de ensaio em plataforma sísmica

Os ensaios de identificação modal têm permitido esclarecer algumas das dificuldades verificadas no desenvolvimento de modelos lineares, entre as quais se destacam:

- Contribuição dos elementos estruturais secundários ou não estruturais;
- Interação solo-estrutura;
- Comportamento de paredes resistentes em betão armado;
- Grau de continuidade entre elementos estruturais;
- Comportamento de estruturas de alvenaria.
- Controle de estruturas cuja importância socio-económica justifica um mais rigoroso conhecimento do modelo estrutural (pontes, centrais nucleares, plataformas *off-shore*, etc.).
- Avaliação de danos em estruturas;
- Caracterização das acções.

## 2. Formulação analítica subjacente aos ensaios de identificação modal

### 2.1 Fundamentos de Dinâmica Estrutural

A resposta duma estrutura quando actuada por acções dinâmicas pode ser, no caso geral, ser expressa em termos da matriz-função de receptância  $H(\omega)$ . Esta entidade consiste na função de transferência entre a acção e a resposta e reduz em si toda a informação referente à distribuição de rigidez, de inércia e de amortecimento da estrutura. O primeiro passo dos métodos de identificação modal consiste precisamente na avaliação dos termos desta matriz-função, a partir dos quais se identificam os diversos parâmetros modais.

Nas circunstâncias anteriores, os ensaios de identificação modal distinguem-se com respeito à **natureza da acção** que se encontra aplicada na estrutura, havendo a distinguir as seguintes situações:

- Ensaios em regime livre;
- Ensaios com uma excitação harmónica;
- Ensaios com uma excitação periódica;
- Ensaios com uma excitação determinística não periódica;
- Ensaios com uma excitação estocástica.

#### **Ensaios em regime livre**

Admitindo que o sistema é libertado duma configuração inicial deformada ( $q_0$ ) com um determinado campo inicial de velocidades

( $\dot{q}_0$ ) as grandezas correspondentes em termos das coordenadas modais são então:

$$\mathbf{q}_{G0} = \Phi^{-1} \mathbf{q}_0 = \Phi^T \mathbf{M} \mathbf{q}_0$$

$$\dot{\mathbf{q}}_{G0} = \Phi^{-1} \dot{\mathbf{q}}_0 = \Phi^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}}_0$$

A resposta em cada coordenada modal é dada por

$$q_{Gn}(t) = e^{-\xi_n p_n t} \left( q_{Gn0} \cos(p_{dn} t) + \frac{q_{Gn0} + \xi_n p_n \dot{q}_{Gn0}}{p_{dn}} \operatorname{sen}(p_{dn} t) \right)$$

sendo a resposta em coordenadas iniciais dada através de

$$\mathbf{q}(t) = \Phi \mathbf{q}_G(t)$$

Embora na formulação da resposta não intervenha a matriz função de receptância  $\mathbf{H}(\omega)$  constata-se que, caso a deformada inicial seja “afim” dum determinado modo de vibração  $n$ , ou seja

$$\mathbf{q}_0 = \alpha \Phi_m$$

a resposta da estrutura faz-se apenas nesse modo de vibração pelo que é possível identificar a correspondente configuração modal, frequência e coeficiente de amortecimento.

### Ensaios com excitação harmónica

Considere-se agora que o sistema é sujeito a uma excitação cuja amplitude varia harmonicamente ao longo do tempo, ou seja:

$$\mathbf{Q}(t) = \bar{\mathbf{Q}} e^{i\omega t}$$

A resposta em regime permanente<sup>2</sup> também varia harmonicamente no tempo, sendo dada por:

---

<sup>2</sup> correspondente à solução particular da equação de movimento

$$\mathbf{q}(t) = \bar{\mathbf{q}}e^{i\omega t}$$

em que a amplitude  $\bar{\mathbf{q}}$  se relaciona com a amplitude da excitação através de

$$\bar{\mathbf{q}} = \left( -\omega^2 \mathbf{M} + i\omega \mathbf{C} + \mathbf{K} \right)^{-1} \bar{\mathbf{Q}} = \mathbf{H}(\omega) \bar{\mathbf{Q}}$$

A matriz  $\mathbf{H}(\omega)$  é a função de transferência entre o vector das forças aplicadas e o vector da resposta. O seu termo genérico  $\mathbf{H}_{mn}(\omega)$  traduz a amplitude e atraso de fase da resposta no  $m$ -ésimo grau de liberdade quando é aplicada uma excitação de amplitude unitária e frequência  $\omega$  no  $n$ -ésimo grau de liberdade.

Da equação anterior ressalta que

$$\mathbf{H}(\omega) = \left( -\omega^2 \mathbf{M} + i\omega \mathbf{C} + \mathbf{K} \right)^{-1}$$

ou

$$\mathbf{H}^{-1}(\omega) = \left( -\omega^2 \mathbf{M} + i\omega \mathbf{C} + \mathbf{K} \right)$$

A expressão anterior permite obter uma expressão alternativa da matriz função de receptância. Com efeito, pré-multiplicando-a e pós-multiplicando-a por  $\Phi^T$  e  $\Phi$ , respectivamente, obtém-se:

$$\Phi^T \mathbf{H}^{-1} \Phi = \left[ \cdot \cdot -\omega^2 + i\omega 2\zeta p + p^2 \cdot \cdot \right]$$

Considerando a expressão anterior, pré-multiplicando-a por  $\Phi^{-T}$  e pós-multiplicando-a por  $\Phi^1$  e inventando-a tem-se

$$\mathbf{H}(\omega) = \Phi \left[ \cdot \cdot -\omega^2 + i\omega 2\zeta p + p^2 \cdot \cdot \right]^{-1} \Phi^T$$

Individualizando o termo genérico  $(m,n)$  da equação anterior

$$H_{mn}(\omega) = \sum_{k=1}^N \frac{\Phi_{mk} \Phi_{nk}}{-\omega^2 + i2\zeta_k p_k \omega + p_k^2}$$

Esta equação permite a obtenção de cada termo da receptância exprimindo-o como uma soma da contribuição de todos os modos de vibração.

A receptância  $H(\omega)$  integra-se no quadro mais geral das FRF – Funções de Resposta em Frequência<sup>3</sup> - conjuntamente com a Mobilidade  $Y(\omega)$  e a Inertância  $I(\omega)$  que diferem da anterior pelo facto da resposta se encontrar descrita em termos da velocidade ou aceleração, respectivamente.

### Ensaio com excitação periódica

No caso geral duma excitação periódica (período  $T$ ), esta pode ser substituída pela correspondente série de Fourier, ou seja:

$$Q(t) = Q(t + T) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ik\omega_0 t}$$

pelo que a resposta pode ser obtida sobrepondo o efeito individual de cada harmónica da excitação, ou seja

$$q(t) = \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{+\infty} H(k\omega_0) c_k e^{ik\omega_0 t}$$

em que  $\omega_0$  é a frequência base da excitação ( $\omega_0 = 2\pi/T$ ).

### Ensaio com excitação determinística não periódica

Também neste caso é possível exprimir a resposta em termos da

---

<sup>3</sup> ou funções de transferência



função de receptância. Com efeito e assumindo que a excitação pode ser substituída pelo seu integral de Fourier a resposta é dada através de:

$$\mathbf{q}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathfrak{T}\{\mathbf{q}\}(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{H}(\omega) \mathfrak{T}\{\mathbf{Q}\} e^{i\omega t} d\omega$$

## Ensaio com excitação estocástica

Caso a excitação seja assimilável a um processo estocástico estacionário e ergódico, as funções de auto densidade espectral de potência da acção  $\mathbf{S}^{QQ}(\omega)$  e da resposta  $\mathbf{S}^{qq}(\omega)$  relacionam-se através de:

$$\mathbf{S}^{qq}(\omega) = \mathbf{H}(\omega) \mathbf{S}^{QQ}(\omega) \mathbf{H}^{*T}(\omega)$$

em que \* denota tratar-se do complexo conjugado.

## 2.2 Propriedades da receptância

Alguns dos métodos de identificação modal baseiam-se na análise do andamento dos termos estimados experimentalmente da matriz função de receptância. A dependência que o termo genérico  $(m,n)$  apresenta relativamente à frequência de excitação torna-se mais evidente quando considerado o caso do amortecimento nulo. Neste caso ( $\zeta_k=0: k=1,2,..N$ ) tem-se:

$$H_{mn}(\omega) = \frac{\phi_{m1}\phi_{n1}}{p_1^2 - \omega^2} + \frac{\phi_{m2}\phi_{n2}}{p_2^2 - \omega^2} + \dots + \frac{\phi_{mk}\phi_{nk}}{p_k^2 - \omega^2} + \dots + \frac{\phi_{mN}\phi_{nN}}{p_N^2 - \omega^2}$$

A importância, relativa, da contribuição de cada modo depende das correspondentes constantes modais ( $\Phi_{mk}$  e  $\Phi_{nk}$ ) nos graus de

liberdade nos quais é medida a resposta ( $m$ ) e aplicada a excitação ( $n$ ), assim como da proximidade da frequência de excitação ( $\omega$ ) relativamente à frequência do modo em causa ( $p_k$ ). Assim sendo e em cada gama de frequências, o termo genérico da matriz função de receptância é determinado pela contribuição do modo ressonante. As únicas excepções verificam-se quando o ponto no qual se mede a resposta ou o ponto no qual se aplica a excitação são pontos nodais do modo em causa.

Considerando os resultados do *exemplo modelo* (vd. anexos) observe-se o gráfico de Bode do termo (7,7) da matriz função de receptância.

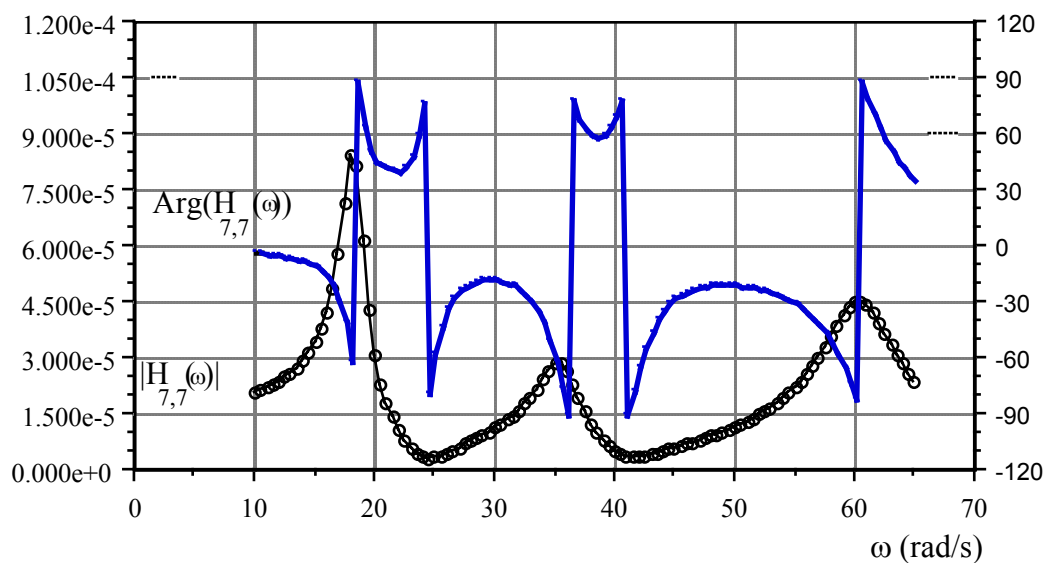


Fig. 2.1 – Gráfico de  $H_{7,7}$  (formato de Bode)

Na figura anterior a proximidade dos modos de vibração é assinalada através dos “picos” nas frequências de 18.36 rad/s (1º modo), 35.66 rad/s (3º modo) e 60.48 rad/s (4º modo), a par da brusca variação de fase para as mesmas frequências. O 2º modo (21.01 rad/s) não se manifesta porque não envolve o grau de liberdade nº 7.

Observe-se, ainda, a figura seguinte com a individualização dos termos correspondentes aos diferentes modos de vibração. Trata-se de outro exemplo com frequências de, aproximadamente, 2.5, 6, 11 e 16.5 Hz.

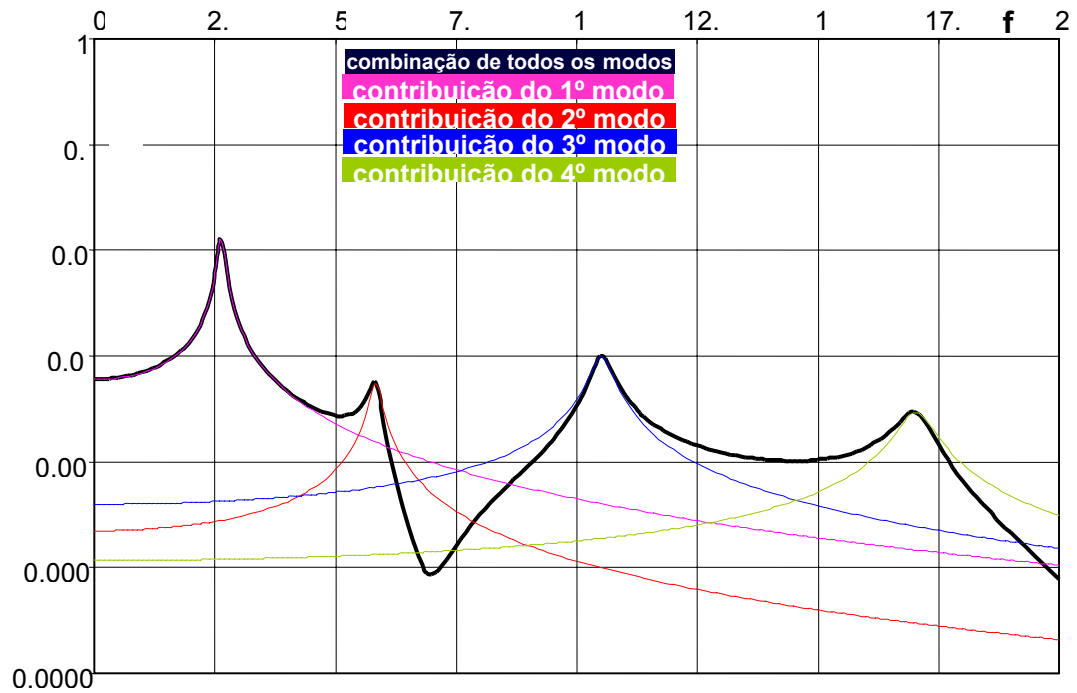


Fig. 2.2 – Representação gráfica de um dos termos de  $H_{mn}(\omega)$ .

### 3. Técnicas de Medição Experimental das FRF

#### 3.1 Sistema de medição

Um sistema de medição, registo e tratamento de vibrações é constituído, no caso geral, de acordo com a Fig. 3.1.

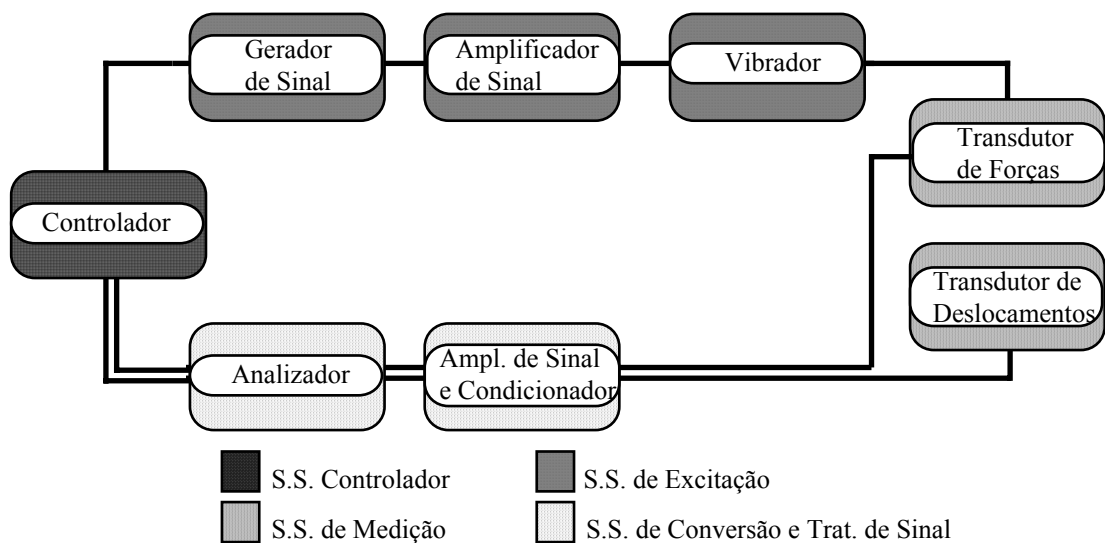


Fig. 3.1 – Constituição genérica de um sistema de medição de vibrações.

A figura anterior suscita as seguintes observações:

- A aquisição dos sinais da força e da resposta é realizada através duma amostragem discreta dos sinais contínuos. Todos os subsequentes passos de processamento são conduzidos com os sinais discretizados.
- É frequente em aplicações de engenharia civil conduzir os ensaios com a supressão do sub-sistema de excitação, no que é designado por condições de vibração ambiente.

### 3.2 Processos de excitação da estrutura

Os ensaios de identificação modal subdividem-se, numa primeira fase, de acordo com a excitação aplicada.

- Excitação não controlada. Neste domínio é ainda possível distinguir as situações em que a vibração observada é de baixa intensidade (vibração ambiente devida ao vento, ao tráfego, ao funcionamento de equipamentos electromecânicos, etc.) ou de intensidade moderada (vibração em regime livre, devida a sismos naturais ou artificiais, etc.).
- Excitação controlada. Vibração devida à percussão da estrutura com uma marreta ou vibração provocada por excitadores.

### 3.3 Formulação subjacente de dinâmica estrutural

Outra das subdivisões nos ensaios de identificação modal reside na formulação de dinâmica estrutural. Nestas circunstâncias podemos distinguir as seguintes situações:

- Excitação harmónica (por níveis). Neste caso é aplicada uma excitação harmónica de amplitude  $\bar{Q}$  e frequência  $\omega$  conhecidas. A resposta em regime permanente é registada sendo obtidos os valores discretos da receptância correspondentes à frequência de excitação. O ensaio terá que ser repetido tantas as vezes quantas as frequências consideradas necessárias para obter uma boa discretização das FRFs.
- Excitação periódica. A comparação das séries de Fourier da

acção e da resposta facultada a estimativa simultânea dos valores discretos da FRF para todas as frequências que compõem a acção ( $\omega = k\omega_0$ ).

- Excitação estocástica. Geração dum sinal puramente aleatório através dum gerador de ruído. A identificação dos valores discretos das FRFs é realizada através da análise espectral da acção e da resposta.
- Outras. Excitação transiente, excitação em seno rápido, excitação em seno lento, etc..

### 3.4 Processamento digital de sinal

A aquisição dos sinais, da excitação e da resposta, é realizada através da sua digitalização finita, processo que traduz a amostragem regular no tempo e pelo qual o sinal contínuo e de duração infinita é substituído por um sinal discreto e finito. Nestas circunstâncias, todos os subseqüentes processos de determinação das estimativas espectrais são realizados com o sinal discreto fazendo uso de procedimentos do âmbito da Teoria do Processamento Digital de Sinal. Abordam-se seguidamente algumas das consequências deste condicionalismo de ensaio.

#### Transformada Discreta Finita de Fourier

O sinal  $x(t)$  é substituído pela amostra finita  $x_k$  ( $k=1,2,..N$ ) no período de observação  $T(=N\Delta)$  correspondente à amostragem regular com um intervalo de digitalização  $\Delta$ . Nestas circunstâncias define-se a transformada discreta (e finita) de Fourier DFT

através de:

$$x(t) = a_0 / 2 + \sum_{m=1}^M a_m \cos(2m\pi t/T) + b_m \sin(2m\pi t/T)$$

em que os coeficientes de Fourier ( $a_m$  e  $b_m$ ) são determinados por integração numérica através de:

$$a_m = \frac{2}{N} \sum_{k=1}^N x_k \cos(2m\pi k / N) \quad b_m = \frac{2}{N} \sum_{k=1}^N x_k \sin(2m\pi k / N)$$

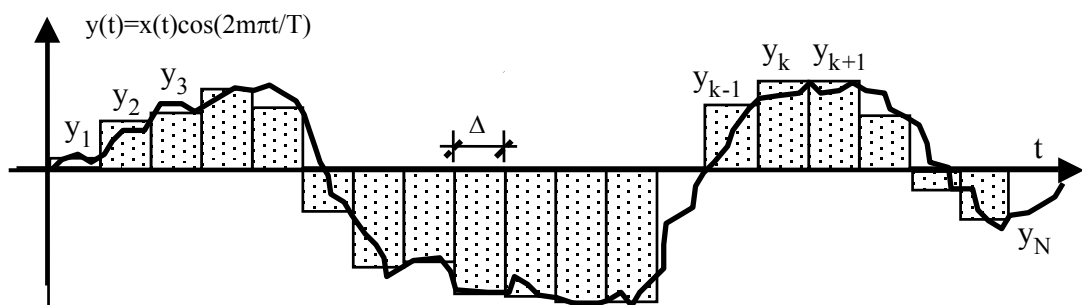


Fig. 3.2 – Determinação dos coeficientes de Fourier.

O número limitado de termos da série de Fourier ( $M=N/2$  no caso de  $N$  par) fundamenta-se no facto de que – em virtude da discretização do sinal – as componentes com alta frequência não são devidamente reproduzidas. A frequência máxima, também designada por frequência de Nyquist – é dada por  $f_{Ny} = 1/2\Delta$ , que corresponde a metade da frequência de amostragem.

### Transformada Rápida de Fourier

Cooley, J. W. e Tukey, J. W. desenvolveram um algoritmo de cálculo da transformada discreta de Fourier para os casos em que a dimensão da amostra  $N$  é múltiplo inteiro de 2. Dada a extrema redução do tempo de cálculo relativamente a outros

algoritmos, este algoritmo generalizou-se, sendo referenciado por FFT (Fast Fourier Transform).

### Limitações da DFT

As limitações das transformadas discretas de Fourier resultam dos seguintes factores:

- **período de observação  $T$  é finito**. Origina:
  - Limitações de resolução em frequência ( $1/T$  em frequência circular);
  - Perturbações nas extremidades do período de observação. Este efeito, designado por *Leakage*, resulta do sinal não ser geralmente periódico no período de observação, assim como das perturbações nas extremidades do mesmo (regime transitório, etc.). Este efeito pode ser contrariado através da afectação do registo por uma “janela” no domínio do tempo.
- **A representação no domínio do tempo é discreta** originando o efeito de *Aliasing*. As componentes do sinal contínuo de frequência superior à frequência de Nyquist aparecem “reflectidas” em torno desta frequência.

Entre as outras fontes de erro que, não resultado do processo de cálculo dos coeficientes de Fourier, ainda assim afectam os resultados, destacam-se as seguintes:

- Erro de truncatura. Refere-se ao erro inerente à conversão analógico-digital do sinal em consequência do  $n^\circ$  finito de níveis do conversor.
- Erros instrumentais. Efeitos do ruído eléctrico, efeitos da gama



dinâmica limitada do sensor, etc..

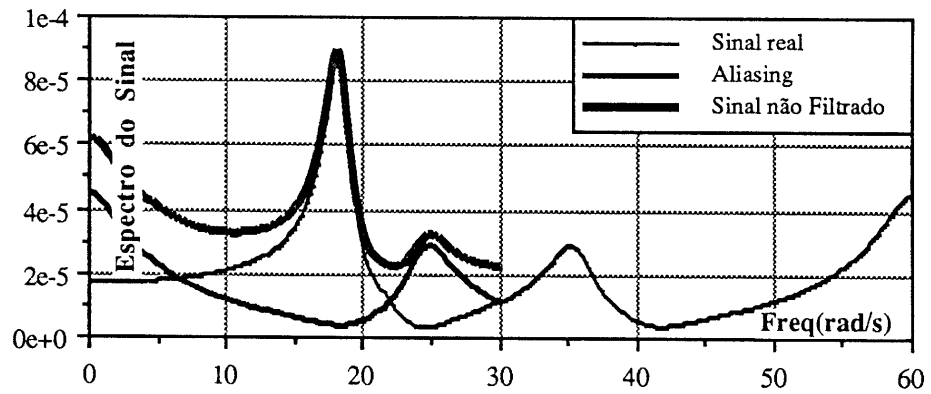


Fig. 3.3 – Efeito do Aliasing.

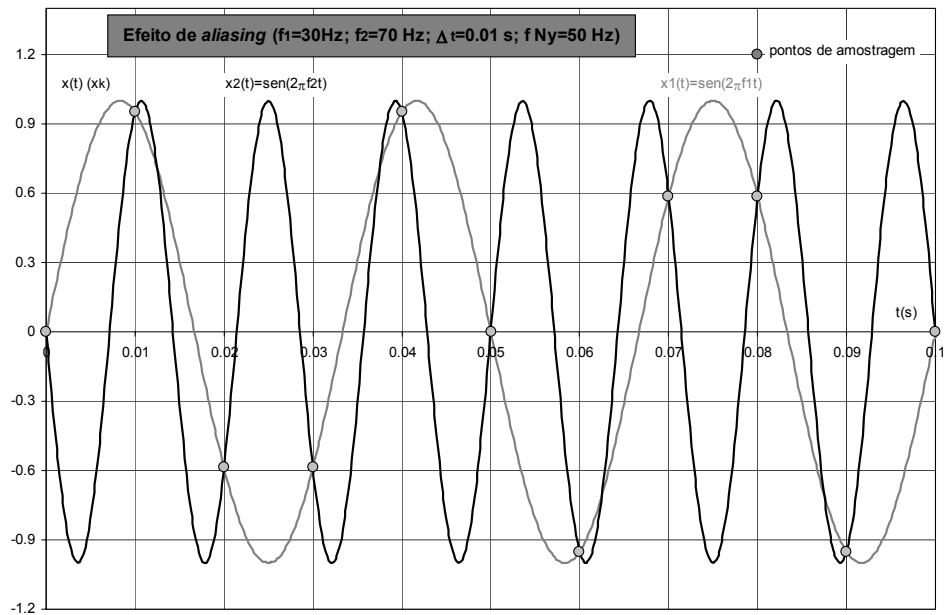


Fig. 3.4 – Efeito do Aliasing.

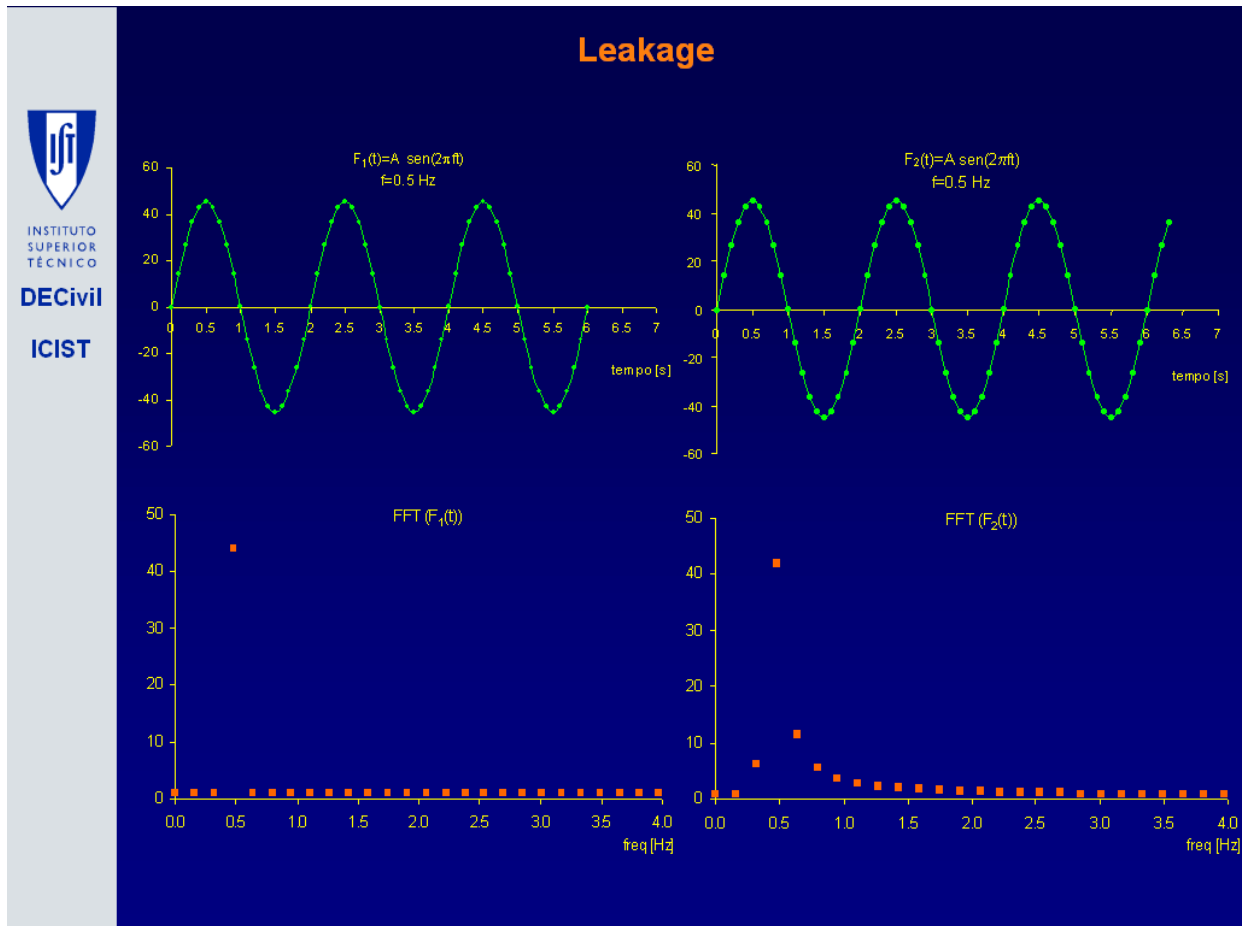


Fig. 3.6 – Efeito do *Leakage*.

### 3.5 Estimativas discretas da FRF

Em geral, a determinação das estimativas da função de resposta em frequência é realizada comparando as transformadas discretas finitas de Fourier da acção e da resposta para frequências idênticas.

## 4. Identificação dos Parâmetros Modais

Por identificação dos parâmetros modais entende-se a fase em que, determinadas as estimativas (discretas) das FRFs, se identificam as frequências, constantes modais (modos) e respectivos coeficientes de amortecimento.

### 4.1 Métodos de 1 grau de liberdade

Esta designação engloba os procedimentos em que os valores experimentais discretos são ajustados por troços a expressões simplificadas que são, por sua vez, obtidas através da eliminação da contribuição de todos os modos com a excepção do modo cuja frequência é mais próxima da frequência de excitação em análise – modo ressonante. Considerando frequências próximas do modo  $k$ , o termo  $(m,n)$  da matriz função de receptância degenera em:

$$H_{mn}(\omega) = \frac{\Phi_{mk} \Phi_{nk}}{(p_k^2 - \omega^2) + i2\xi_k p_k \omega}$$

Dentro dos diversos métodos relatados na bibliografia, exemplificar-se-á com o **Método da amplitude de pico**. Este método integra as seguintes fases:

1. determinação da frequência do modo  $k$  através do pico de  $|H_{mn}(\omega)|$ ;
2. determinação do respectivo coeficiente de amortecimento modal através do método dos pontos de meia potência (em que  $\omega_a$  e  $\omega_b$  designam as abcissas dos pontos de meia potência);

$$\xi_k = \frac{\omega_b - \omega_a}{\omega_b + \omega_a}$$

3. determinação do parâmetro modal.

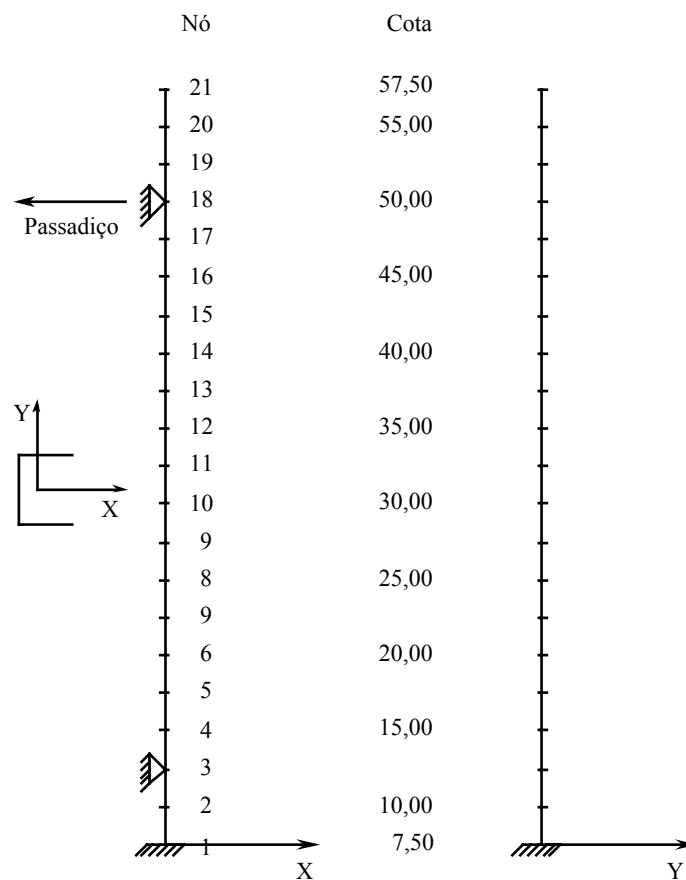
$$\phi_{mk}\phi_{nk} = 2p_k^2 \xi_k H_{mn}(\omega = p_k)$$

## 4.2 Métodos de N graus de liberdade

Tratam-se de métodos que consideram, numa forma mais ou menos simplificada, a contribuição dos modos não ressonantes.

### Exemplos de Aplicação:

- Ensaios de recepção da Ponte sobre o Guadiana;
- Ensaios de identificação modal do corpo 4 do Hospital de Santa Maria (Patrícia Ferreira);
- Ensaios de identificação modal da estrutura da Torre da Boca do Vento, em Almada (detalhado)

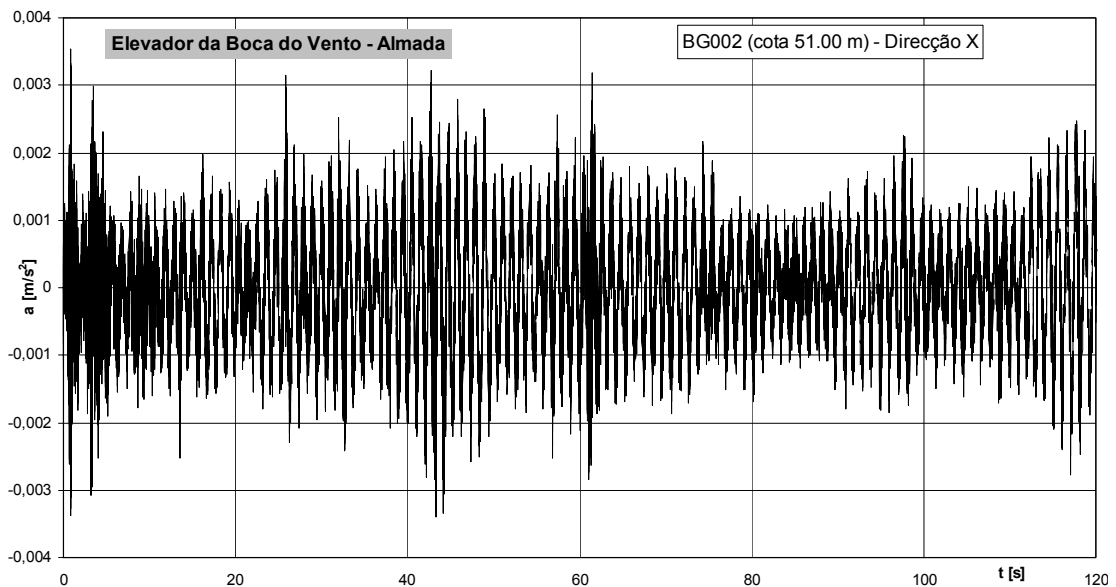


### Modelo de cálculo da estrutura da Torre da Boca do Vento

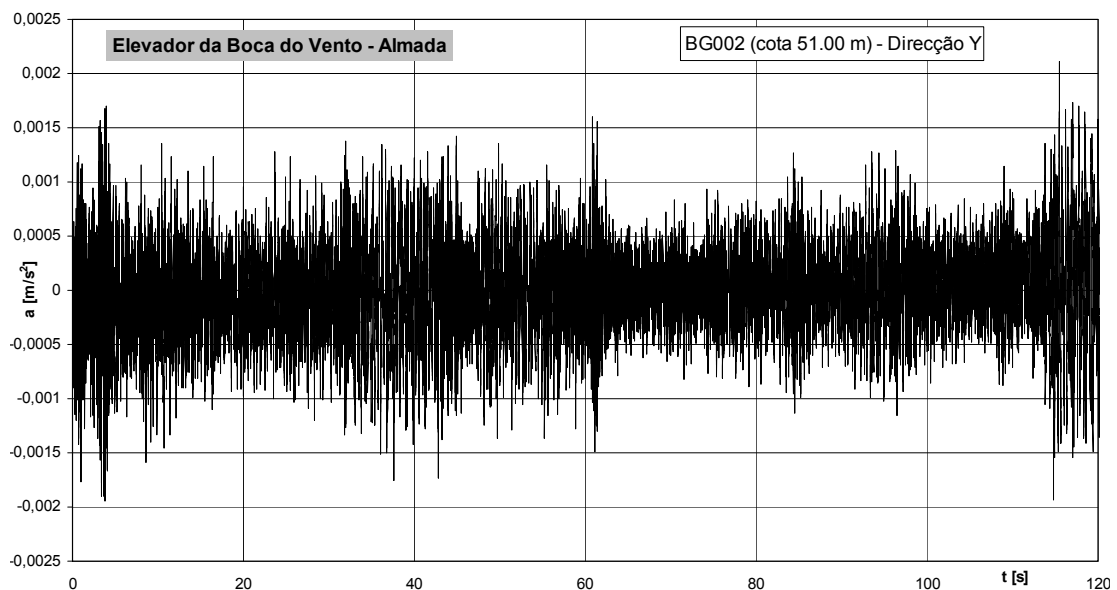
O objectivo último destes ensaios consistia na identificação dos valores dos coeficientes de amortecimento modais, assim como das correspondentes frequências.

O ensaio foi conduzido em condições de vibração ambiente.

Os registos de vibração ambiente foram colhidos nas cotas 29 m, 40 m e 51 m (passadiço superior de acesso). Ver exemplos.



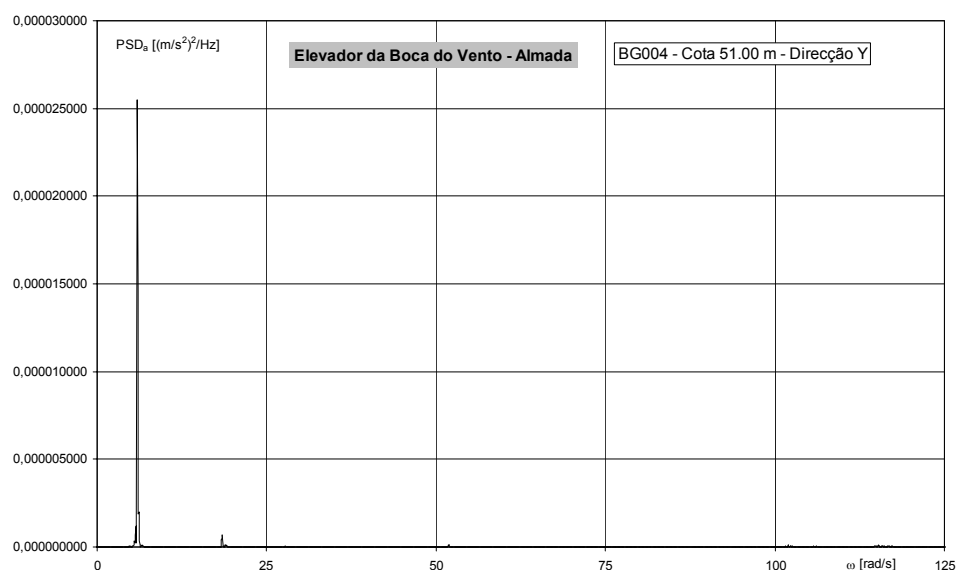
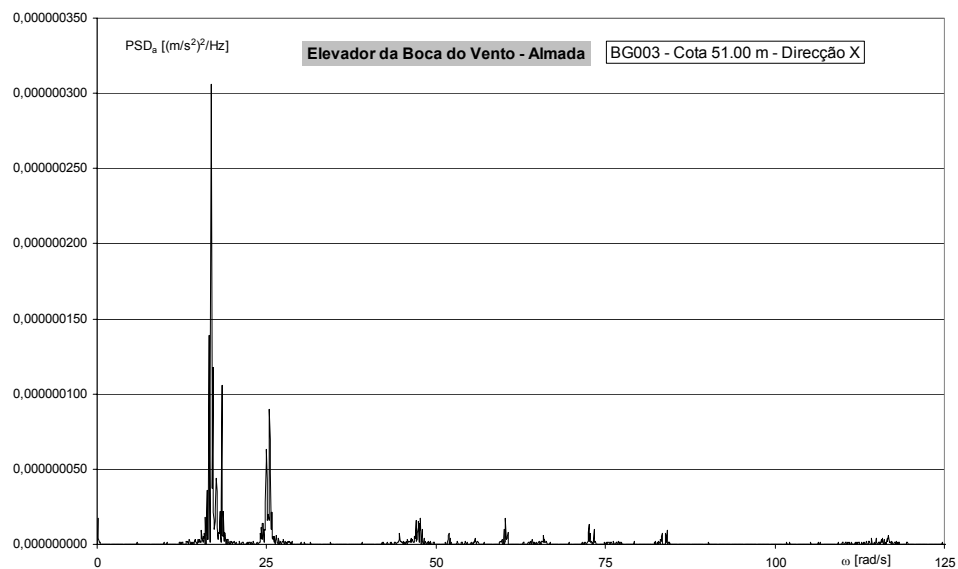
Direcção Y (topo)



Direcção X (topo)

As funções de densidade espectral de potência são, em virtude da hipótese de ruído branco, análogas à Inertância  $I(\omega)$  (função que relaciona a resposta em aceleração com a excitação em força). Trata-se de uma das funções de resposta em frequência FRFs.

Observem-se os seguintes exemplos.

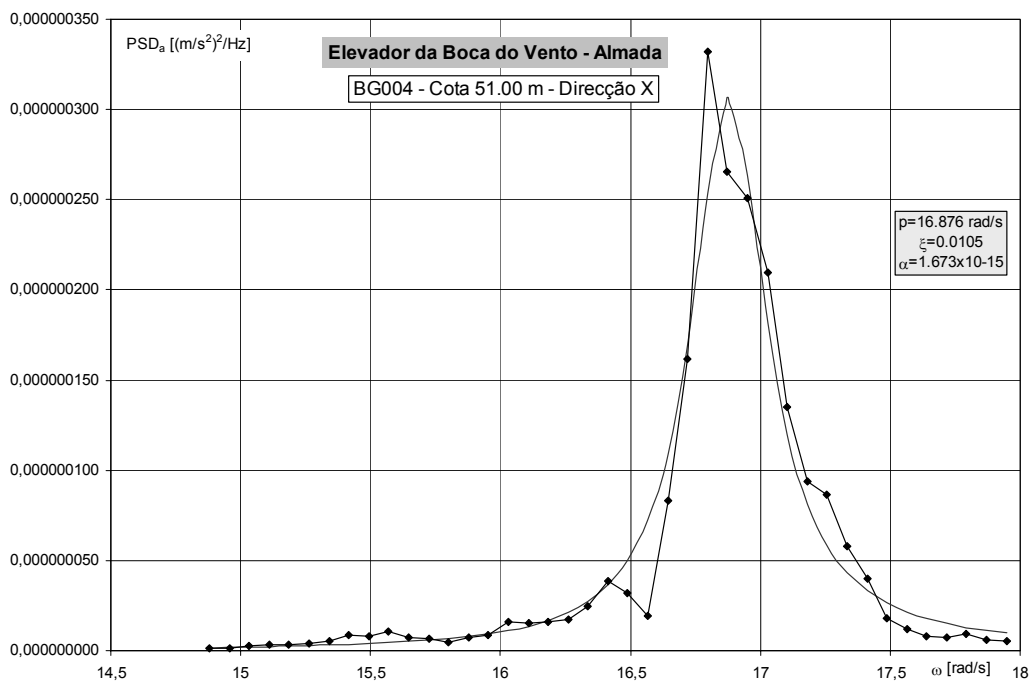


Nestas figuras são claramente evidentes os “picos” correspondentes aos modos de vibração.

As frequências fundamentais identificadas foram de  $f_{1y}=0.945$  Hz e de  $f_{1x}=2.687$  Hz. Os valores numéricos eram de 0.84 Hz e 3.78 Hz, pela mesma ordem.

De seguida procurou-se ajustar os resultados experimentais às equações teóricas, para o que se considerou apenas a contribuição do modo ressonante. Este ajuste permitiu refinar as estimativas das frequências e, sobretudo, identificar os correspondentes coeficientes de amortecimento modais.

A figura seguinte ilustra um passo intermédio.



Ajuste dos resultados experimentais – identificação de  $\zeta_k$